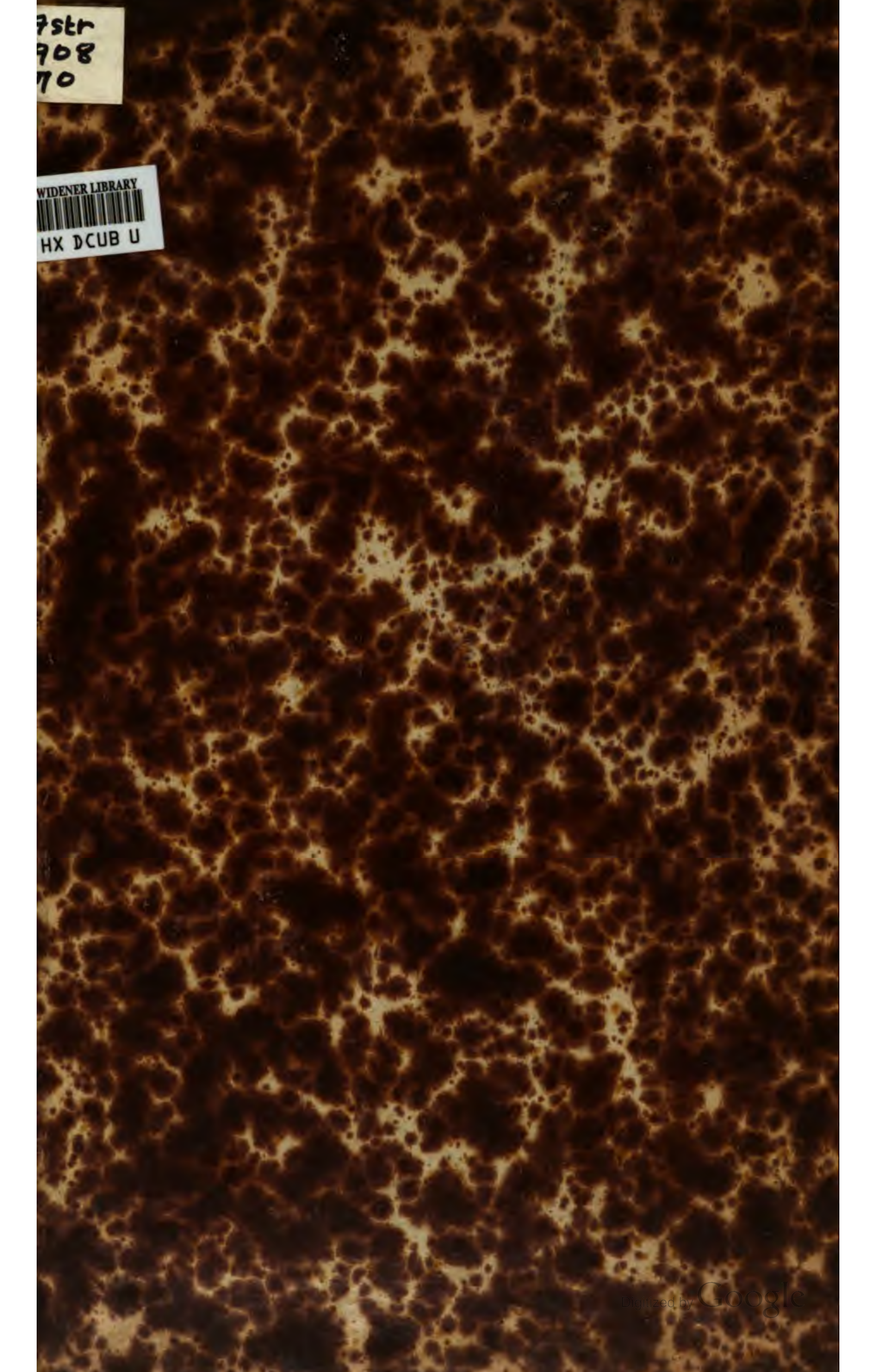
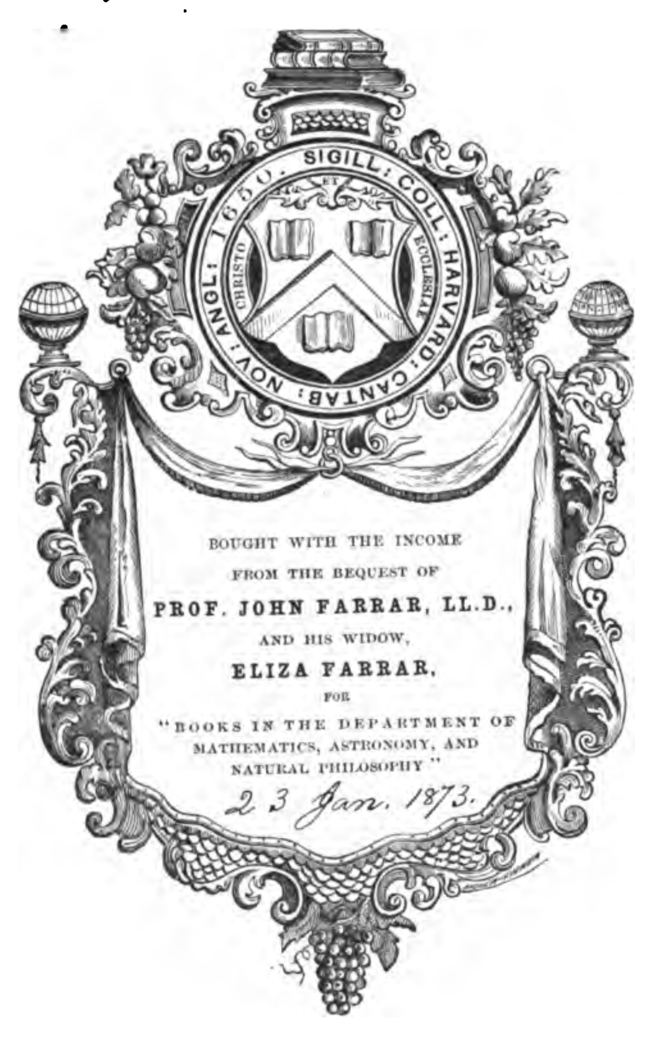


7str
908
70
WIDENER LIBRARY
HX DCUB U
Digitized by Google


SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
23 Jan. 1873.

BESTIMMUNG

DER

SONNENPARALLAXE

DURCH

VENUSVORÜBERGÄNGE VOR DER SONNENSCHEIBE

MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG

DES IM JAHRE 1874 EINTREFFENDEN VORÜBERGANGES.

VON

Peter Andreas

P. A. HANSEN,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



Des IX. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº V.

MIT ZWEI PLANIGLOBEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1870.

Vom Verfasser übergeben den 27. November 1869.
Der Abdruck vollendet den 18. Februar 1870.

BESTIMMUNG

DER

SONNENPARALLAXE

DURCH

VENUSVORÜBERGÄNGE

VOR DER

SONNENSCHEIBE

MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG

DES IM JAHRE 1874 EINTREFFENDEN VORÜBERGANGES.

MIT ZWEI PLANIGLOBEN.

VON

P. A. HANSEN.

§ 1. Allgemeine Theorie.

1.

In dieser Untersuchung werde ich von den Gleichungen und Ausdrücken ausgehen, die ich in der, »Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen« benannten, Abhandlung*) entwickelt habe, und dabei nur die Modificationen einführen, die die Anwendung der dort für die Sonnenfinsternisse ausdrücklich eingerichteten Gleichungen auf die Venusvorübergänge verlangt. Diese Modificationen sind indessen geringfügig, und reduciren sich fast nur auf die Einführung einer anderen Einheit für die Entfernungen der Erde, Venus und Sonne von einander, so wie für den Halbmesser der Erde, und in einer Aenderung des Zeichens im Ausdruck für den Erzeugungswinkel des Schattenkegels, nebst den davon abhängigen Functionen.

Für die Berechnung der Sonnenparallaxe aus den Beobachtungen habe ich einen strengen Ausdruck erhalten, welcher in einer einfachen quadratischen Gleichung besteht, die allgemein gültig ist. Er gilt sowohl für beobachtete Ein- und Austritte, als für gemessene Ränder- oder Mittelpunktsentfernungen.

Die Differentialgleichung, durch deren Hülfe man die für die Bestimmung der Sonnenparallaxe günstigen Beobachtungsörter von den ungünstigen unterscheiden muss, lässt sich auf eine sehr einfache Form bringen, und es folgt daraus ein sehr einfaches Kriterion für diese Günstigkeit; ein Kriterion, welches der Beobachter stets vor Augen hat. Die allergünstigsten Beobachtungen sind diejenigen, während welcher die Mittelpunkte der Venus und der Sonne sich in einem und demselben

*) Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Band IV. Leipzig bei S. Hirzel. 1858.

Verticalkreise befinden, also der Positionswinkel der Venus in Bezug auf den Sonnenmittelpunkt, und den durch diesen gelegten Verticalkreis entweder 0 oder 180° ist. Im Gegentheil, Beobachtungen, in welchen dieser Positionswinkel 90° oder 270° ist, sind zur Bestimmung der Sonnenparallaxe absolut untauglich. Werthe des Positionswinkels zwischen diesen und jenen Grenzwerthen können unter Umständen auch günstigen Beobachtungsörtern angehören, aber immer bei kleineren Sonnenhöhen.

2.

In der Theorie der Sonnenfinsternisse war es am dienlichsten, den Aequatorealhalbmesser der Erde als Einheit der Entfernungen anzunehmen, wogegen dieser sich in der Theorie der Venusvorübergänge schon deshalb nicht zur Einheit eignet, weil er die Unbekannte der Aufgabe, die gelöst werden soll, ist. Die Annahme der mittleren Entfernung der Sonne von der Erde als linearische Einheit ist auch nicht passend, weil dadurch die numerischen Werthe mehrerer Grössen, auf welche es sehr ankommt, sehr klein werden, und dadurch Unbequemlichkeiten in ihrer Behandlung verursachen. Es sollen daher hier die in der letzt genannten Einheit auszudrückenden Entfernungen mit einem Factor multiplicirt werden, den ich m nennen, und so wählen werde, dass der Halbmesser des Schattenkegels in der durch den Mittelpunkt der Erde zu legenden Projectionsebene nahe gleich Eins wird*), und somit einen für die Rechnungen bequemen Werth bekommt.

3.

Bezeichnet man nun, wie in der angezogenen Abhandlung (Art. 4) die in Theilen der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne ausgedrückten Halbmesser der Venus und der Sonne mit s und s', und nennt den Radius Vector der Venus, so wie die Tafeln ihn geben, r (a. a. O. wurde dieser ϱ' genannt), so wie den Erzeugungswinkel des Schattenkegels f, so wird strenge

$$\sin f = \frac{s' \pm s}{r}$$

wo das obere Zeichen für äussere und das untere für innere Berührungen gilt.

*) Für den Vorübergang des Jahres 1874 wird passend $m = 640$ angenommen werden können.

Werden aber mit Δ und Δ' die Winkel bezeichnet, unter welchen man in der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne die Halbmesser der Venus und der Sonne sieht, so sind

$$s = \sin \Delta,\ s' = \sin \Delta'$$

und man bekommt

$$\sin f = \frac{\sin \Delta' \pm \sin \Delta}{r}$$

wo wieder r der tabularische Werth des Radius Vectors der Venus ist.

4.

Wenden wir dasselbe Coordinatensystem an, wie in der angezogenen Abhandlung. Ziehen wir eine grade Linie durch die Mittelpunkte der Venus und der Sonne, und eine Parallele dazu, die durch den Mittelpunkt der Erde geht, und die Achse der Z ist. Legen wir senkrecht darauf eine Ebene, die auch durch den Mittelpunkt der Erde geht, und in welcher die beiden andern, rechtwinkligen Coordinaten P und Q liegen, von welchen P, in der Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Ecliptik liegend, in positiver Richtung sich nach Osten und Q nach Norden erstreckt. Sei ferner u' der Halbmesser des Kreises, den der Schattenkegel in der Ebene der P und Q ausschneidet, so ist strenge, wenn man die Einheit aller linearischen Grössen mit m bezeichnet, da u' eine Linie ist,

$$u' = (Z \sin f \pm ms) \sec f$$

aber in den Venusdurchgängen ist das Maximum von f nahe $22'$, und deshalb darf man hier $\sec f = 1$ setzen, und Z ist sehr nahe der Entfernung der Venus von der Erde gleich. Nennt man diese Entfernung $r_{,}$, so darf man

$$Z = m r_{,}$$

setzen, und bekommt somit, da auch sehr nahe $r_{,} = r' - r$ ist, wenn r' den tabularischen Radius Vector der Sonne bezeichnet,

$$u' = m \frac{r_{,}}{r} \sin \Delta' \pm m \frac{r'}{r} \sin \Delta$$

Man kann auch f durch u' ausdrücken, und erhält durch die vorstehenden Formeln leicht,

$$\sin f = \frac{1}{m r_{,}} (u' \mp m \sin \Delta)$$

5.

In den strengen Ausdrücken der Coordinaten P, Q, Z des Art. 2 der Abhandlung muss hier statt der Entfernung des Mondes von der Erde (dort r genannt) die Entfernung der Venus von der Erde gesetzt werden. Es werden daher

$$P = mr_, \cos b \sin (l - \lambda')$$
$$Q = mr_, \{\sin b \cos \beta' - \cos b \sin \beta' \cos (l - \lambda')\}$$
$$Z = mr_, \{\sin b \sin \beta' + \cos b \cos \beta' \cos (l - \lambda')\}$$

wo l und b die geocentrische Länge und Breite der Venus, und λ' und β' die aphroditocentrische Länge und Breite der Sonne sind. Da in den Venusdurchgängen immer $\cos (l - \lambda') = 1$ gesetzt werden darf, so dürfen statt der vorstehenden strengen Werthe von Q und Z die folgenden angewandt werden,

$$Q = mr_, \sin (b - \beta')$$
$$Z = mr_, \cos (b - \beta')$$

oder statt der letzteren

$$Z = mr_,$$

von welcher schon im vor. Art. Gebrauch gemacht worden ist. Der strenge Ausdruck von P ist schon so einfach, dass gar keine Abkürzung desselben nöthig ist.

6.

In der Theorie der Sonnenfinsternisse wurde der dort eintretende selenocentrische Ort der Sonne auf den geocentrischen hingeführt, (s. Abh. Art. 19) und dieses liess sich dort auf eine sehr einfache und genaue Weise deshalb bewirken, weil das Verhältniss der Entfernung der Sonne von der Erde zu der des Mondes nahe $= 400 : 1$ ist. Da aber das Verhältniss der Entfernung der Sonne von der Erde zu der der Venus in der unteren Conjunction nahe $= 4 : 1$, so würde im gegenwärtigen Falle eine ähnliche Hinführung des aphroditocentrischen Orts der Sonne auf den geocentrischen misslich werden und die Genauigkeit beeinträchtigen können. Es verursacht aber im gegenwärtigen Falle diese Hinführung gar keine Abkürzung der Rechnung, denn da mit Ausnahme einer kleinen Correction wegen der Aberration die aphroditocentrische Länge der Sonne der um 180° vergrösserten, oder verminderten, heliocentrische Länge der Venus, und jene Breite dieser, mit umgekehrten

Vorzeichen genommen gleich ist, so hat man den erforderlichen Ort der Sonne fast ohne Mühe, da man ohnehin den heliocentrischen Ort der Venus zur Erlangung des geocentrischen berechnen muss.

7.

Es sind nun vor Allem aus den Venustafeln in der Nähe der Conjunctionszeit einige heliocentrische Längen, Breiten und Radien, mit λ, β, r zu bezeichnen, und für dieselben Zeiten aus den Sonnentafeln die Längen, Breiten und Radien, nebst der Schiefe der Ecliptik und die Zeitgleichung zu berechnen. Der Sonnenradius wurde schon oben mit r' bezeichnet, die Sonnenlänge soll l' und die Sonnenbreite b' genannt werden. Aus diesen Grössen müssen darauf die geocentrischen Längen, Breiten und Entfernungen der Venus von der Erde berechnet werden. Diese sollen im Folgenden, wie oben, mit l, b, $r_{,}$ bezeichnet werden.

Die folgenden Gleichungen finde ich für diese Rechnung bequem,

$$\begin{aligned} r_{,} \cos b \, \sin(l-\lambda) &= r' \sin(l'-\lambda) \\ r_{,} \cos b \, \cos(l-\lambda) &= r' \cos(l'-\lambda) + r\cos\beta \\ r_{,} \sin b &= r' \sin b' + r \sin\beta \end{aligned}$$

aber da sowohl diese Gleichungen, wie jede anderen, die man statt derselben anwenden könnte, die wahren Oerter im Raume voraussetzen, so ist die Aberration auf bekannte Weise zu berücksichtigen und anzubringen. Da die Erscheinung des Vorüberganges der Venus vor der Sonne auf den scheinbaren Oertern der Venus und der Sonne beruht, so sind von nun an unter l und b die scheinbaren geocentrischen Längen und Breiten der Venus, so wie unter l' die scheinbaren Längen der Sonne zu verstehen.

8.

Da die anzuwendenden aphroditocentrischen Längen und Breiten der Sonne selbstverständlich jenen, eben genannten scheinbaren Oertern entsprechen müssen, so wird man sie jedenfalls ohne Weiteres aus den bezüglichen strengen Gleichungen, die denen des vor. Art. entsprechen, erhalten können, nemlich wenn sie wieder wie oben mit λ' und β' bezeichnet werden, durch

$$\begin{aligned} r \cos\beta' \, \sin(\lambda'-l) &= r' \sin(l'-l) \\ r \cos\beta' \, \cos(\lambda'-l) &= r' \cos(l'-l) - r_{,} \cos b \\ r \sin\beta' &= r' \sin b' - r_{,} \sin b \end{aligned}$$

Da aber die Unterschiede, die die Aberration den Werthen $\lambda' - l + 180^0$ und $\beta' + \beta$ hinzufügt, klein sind, so braucht man die vorstehenden Gleichungen nie anzuwenden, sondern kann die Wirkung der Aberration auf λ' und β' durch Differentialformeln berücksichtigen. Sei die

Aberration in Sonnenlänge . . . . . $\delta l'$
» in geoc. Venuslänge . . δl
» in geoc. Venusbreite . . δb

so genommen, dass sie den wahren Oertern hinzugefügt die scheinbaren geben, dann ergeben sich durch die Differentiation der vorstehenden Gleichungen, und mit Berücksichtigung der Grössen, die in der Nähe der Conjunction theils = 1 und theils = 0 gesetzt werden dürfen,

$$\lambda' = 180^0 + \lambda + \delta l' + \frac{r_,}{r} (\delta l' - \delta l)$$
$$\beta' = -\beta - \frac{r_,}{r} \delta b$$

die jede wünschenswerthe Genauigkeit gewähren.

9.

Die ganze Dauer der zunächst bevorstehenden Venusvorübergänge beträgt beiläufig 4 bis 6 Stunden, und in diesem kurzen Zeitraum sind die Bewegungen der Venus und der Sonne so nahe gleichförmig, dass man sie als vollständig gleichförmig betrachten kann.*) Man reicht daher mit drei Venus- und Sonnenörtern, die Intervallen von zwei oder drei Stunden entsprechen, vollständig aus. Nachdem man daher diese Oerter berechnet hat, rechne man für jeden derselben zuerst die Coordinaten

$$P = mr_, \cos b \sin (l - \lambda')$$
$$Q = mr_, \sin (b - \beta')$$

Die Entfernung der Venus von der Erde ändert sich in der Nähe der unteren Conjunction so wenig, dass hier $r_,$ als eine beständige Grösse betrachtet werden kann; die kleine Veränderlichkeit derselben kann jedoch in dieser Rechnung ohne Weiteres berücksichtigt werden. Die drei Werthe der vorstehenden Coordinaten, die man auf diese Weise erhält, sollen mit

$$P_{-1},\quad P_0,\quad P_1$$
$$Q_{-1},\quad Q_0,\quad Q_1$$

*) In dem Vorübergange des Jahres 1874 ist die Ungleichförmigkeit in einem Zeitraume von 4 Stunden in den Hunderttheilen der Bogensecunden kaum merklich.

bezeichnet werden, wobei noch zu bemerken ist, dass P_0 und Q_0 durchaus nicht der Conjunctionszeit zu entsprechen brauchen, sondern dass es gnügt, wenn sie dieser Zeit nahe liegen. Man setze hierauf, je nachdem die beiden Intervalle zwischen den drei Oertern zwei oder drei Stunden betragen, entweder

$$n \sin N = \tfrac{1}{4}(P_1 - P_{-1})$$
$$n \cos N = \tfrac{1}{4}(Q_1 - Q_{-1})$$

oder

$$n \sin N = \tfrac{1}{6}(P_1 - P_{-1})$$
$$n \cos N = \tfrac{1}{6}(Q_1 - Q_{-1})$$

und rechne hieraus n und N, so wie

$$\gamma = Q_0 \sin N - P_0 \cos N$$
$$\mu = 15\, T_0 - \frac{15}{n}(Q_0 \cos N + P_0 \sin N)$$

wo T_0 die wahre Sonnenzeit des ersten, beliebig anzunehmenden, Meridians ist, für welche P_0 und Q_0 gelten.

Die vorstehenden, zu berechnenden Grössen gehören der Ebene der P und Q an, und haben in dieser die folgende Bedeutung.

n ist die stündliche gemeinschaftliche Bewegung der Sonne und der Venus;

N ist der Winkel, den diese Bewegung mit der Projection des durch den Punkt (λ', β') gehenden Breitenkreises macht;

γ ist der kürzeste Abstand der gemeinschaftlichen Projection der Mittelpunkte der Sonne und der Venus von dem Mittelpunkt der Erde;

μ ist die in Graden ausgedrückte wahre Zeit des ersten Meridians, in welcher der kürzeste Abstand statt findet.

Mit den im Vorstehenden erklärten Rechnungen sind alle Rechnungen ausgeführt, die sich auf den Mittelpunkt der Erde beziehen, und wie man sieht, kommt darin die Conjunctionszeit der Venus und der Sonne gar nicht vor, sondern ist durch den kürzesten Abstand γ, und die Zeit μ, wann dieser statt findet, ersetzt. Man braucht daher vor Beginn der Vornahme dieser Rechnungen die Conjunctionszeit nur beiläufig in Erfahrung gebracht zu haben, um die drei Zeiten, für welche man die Oerter berechnen muss, so auswählen zu können, dass sie den Zeitraum, in welchem der Vorübergang vor sich geht, beiläufig umfassen.

Auch die stündlichen Bewegungen in Länge und Breite, oder in grader Aufsteigung und Abweichung kommen nicht vor, sondern sind

durch die Eine Bewegung n, und deren Lage zum Nordpol der Ecliptik, die durch N ausgedrückt wird, ersetzt. Auch werden in der Folge weder die Conjunctionszeit noch die genannten stündlichen Bewegungen eintreten.

10.

Wir kommen jetzt zur Berücksichtigung der Parallaxe. Denken wir uns irgend einen Punkt der Erdoberfläche, den ich den Beobachtungsort nennen will, und beziehen diesen auf Coordinaten, die den P, Q, Z parallel sind, und denselben Anfangspunkt haben. Nennen wir diese Coordinaten p, q, z, so sind ihre strengen Ausdrücke (s. Abh. Art. 3)

$$\begin{aligned} p &= m\varrho \cos B \sin(L-\lambda') \\ q &= m\varrho \{\sin B \cos\beta' - \cos B \sin\beta' \cos(L-\lambda')\} \\ z &= m\varrho \{\sin B \sin\beta' + \cos B \cos\beta' \cos(L-\lambda)\} \end{aligned}$$

in welchen ϱ die Entfernung des Beobachtungsortes vom Mittelpunkt der Erde, und L und B die Länge und Breite des geocentrischen Zenith desselben sind. Bezeichnet man hierauf mit P', Q', Z' die auf den Beobachtungsort bezogenen Coordinaten des Mittelpunkts der Venus, so werden

$$\begin{aligned} P' &= P-p \\ Q' &= Q-q \\ Z' &= Z-z \end{aligned}$$

(S. Abh. Art. 3.)

11.

Aus den Ausdrücken des vor. Art. können die Längen und Breiten durch die graden Aufsteigungen und Abweichungen eliminirt werden, ohne dass die Ausdrücke von p, q, z ihre Form ändern, wie ich im Art. 13 der angezogenen Abhandlung gezeigt habe. Seien α' und δ' die grade Aufsteigung und Abweichung des Punktes (λ', β'), A und φ' die grade Aufsteigung und Abweichung des geocentrischen Zeniths des Beobachtungsortes, und h der Winkel am Punkt (λ', β') oder (α', δ'), den der durch denselben gehende Breitenkreis mit dem Abweichungskreise macht, dann werden, wie aus dem a. O. hervorgeht,

$$\begin{aligned} p\cos h - q\sin h &= m\varrho \cos\varphi' \sin(A-\alpha') \\ p\sin h + q\cos h &= m\varrho \{\sin\varphi' \cos\delta' - \cos\varphi' \sin\delta' \cos(A-\alpha')\} \\ z &= m\varrho \{\sin\varphi' \sin\delta' + \cos\varphi' \cos\delta' \cos(A-\alpha')\} \end{aligned}$$

und setzt man hierauf

$$P' \cos h - Q' \sin h = u \sin \theta$$
$$P' \sin h + Q' \cos h = u \cos \theta$$

so bekommt man

$$u \sin \theta = P \cos h - Q \sin h - m\varrho \cos \varphi' \sin (A - \alpha')$$
$$u \cos \theta = P \sin h + Q \cos h - m\varrho \{\sin \varphi' \cos \delta' - \cos \varphi' \sin \delta' \cos A - \alpha')\}$$
$$u \quad = u' - m\varrho \{\sin \varphi' \sin \delta' + \cos \varphi' \cos \delta' \cos (A - \alpha')\} \operatorname{tg} f$$

Legt man durch den Beobachtungsort eine Ebene, die der im Art. 4 erwähnten Ebene parallel ist, so bezeichnet u den Halbmesser des Kreises, den der Schattenkegel in dieser Ebene ausschneidet. Der Winkel θ ist ein Positionswinkel, welcher den Punkt des Sonnenrandes angiebt, in welchen die Venus ein- oder austritt. Der Winkel θ ist Null, wenn der Venusmittelpunkt im Augenblicke des Ein- oder Austritts sich in dem durch den Punkt (α', δ') — wofür man auch hier den Sonnenmittelpunkt annehmen kann, — gehenden Abweichungskreise, und zugleich nördlich von demselben befindet. Er wächst von da in der Richtung nach Osten. Die Berechnung von α' und δ' aus λ' und β' geschieht durch die Gleichungen

$$\sin \eta \sin \varkappa = \sin \beta'$$
$$\sin \eta \cos \varkappa = \cos \beta' \sin \lambda'$$
$$\cos \eta \quad = \cos \beta' \cos \lambda'$$
$$\cos \delta' \sin \alpha' = \sin \eta \cos (\varepsilon + \varkappa)$$
$$\cos \delta' \cos \alpha' = \cos \eta$$
$$\sin \delta' \quad = \sin \eta \sin (\varepsilon + \varkappa)$$

wo ε die Schiefe der Ecliptik bezeichnet. Für h kann man sich immer mit ausreichender Genauigkeit der Formel

$$\sin h = \frac{\sin \varepsilon \cos \alpha'}{\cos \beta'}$$

bedienen; überhaupt brauchen α', δ', h nicht mit der grössten Genauigkeit berechnet zu werden.

12.

Nennt man die grade Aufsteigung der Sonne a, so findet man diese durch die Formel

$$\operatorname{tg} a' = \cos \varepsilon \operatorname{tg} l' - \sin b' \sin \varepsilon$$

und setzt man

$$t = A - a'$$

dann ist t die in Graden ausgedrückte wahre Sonnenzeit des Beobachtungsortes. Sei ferner

$$\Delta a' = a' - \alpha'$$

dann wird

$$A - \alpha' = t + \Delta\alpha'$$

Nennt man τ die in Graden ausgedrückte wahre Zeit unter dem ersten Meridian, die gleichzeitig mit der Zeit t des Beobachtungsortes statt findet, und setzt

$$\lambda = t - \tau$$

dann ist λ die in Graden ausgedrückte östliche, geographische Länge des Beobachtungsortes in Bezug auf den ersten Meridian. Die Coordinaten P und Q nehmen hiemit die folgende Form an

$$P = -\gamma \cos N + \frac{t-\lambda-\mu}{15} n \sin N$$
$$Q = \gamma \sin N + \frac{t-\lambda-\mu}{15} n \cos N$$

(S. Abh. Art. 22) woraus man

$$P \cos h - Q \sin h = -\gamma \cos N' + \frac{t-\lambda-\mu}{15} n \sin N'$$
$$P \sin h + Q \cos h = \gamma \sin N' + \frac{t-\lambda-\mu}{15} n \cos N'$$

erhält, nachdem

$$N' = N - h$$

gesetzt worden ist. Die Substitution aller dieser Ausdrücke in die Gleichungen des vor. Art. giebt für die Ein- und Austritte der Venus

$$u = u' - m\varrho \{\sin\varphi' \sin\delta' + \cos\varphi' \cos\delta' \cos(t + \Delta\alpha')\} \operatorname{tg} f$$
$$u \sin\theta = -\gamma \cos N' + \frac{t-\lambda-\mu}{15} n \sin N' - m\varrho \cos\varphi' \sin(t + \Delta\alpha')$$
$$u \cos\theta = \gamma \sin N' + \frac{t-\lambda-\mu}{15} n \cos N' - m\varrho \{\sin\varphi' \cos\delta' - \cos\varphi' \sin\delta' \cos(t + \Delta\alpha')\}$$

Die Strahlenbrechung ist in diesen Gleichungen nicht berücksichtigt, da angenommen wird, dass die Beobachtungen des Venusdurchganges nicht in unmittelbarer Nähe des Horizonts vorgenommen werden. Sollten aber solche Beobachtungen vorkommen, so ist es ein Leichtes, nach den Entwickelungen der oft angezogenen Abhandlung die Wirkung der Strahlenbrechung den vorstehenden Gleichungen hinzuzufügen. Man hat zu dem Ende nur $m(1+x)$ statt m in diese Gleichungen zu setzen, und der numerische Werth von x kann aus den Gleichungen des Art. 17 der

Abh. berechnet werden. Man wird diesen wohl immer für die Venusdurchgänge unmerklich finden.

13.

Es soll jetzt aus den Gleichungen des vor. Art. der strenge Ausdruck für die Sonnenparallaxe abgeleitet werden.

Berücksichtigen wir zuerst die Abplattung der Erde, und nennen zu dem Ende den Aequatorealhalbmesser derselben ρ_0, die Abplattung c, und die reducirte Breite des Beobachtungsortes $\varphi_,$, dann ergeben sich

$$\rho \cos\varphi' = \rho_0 \cos\varphi_,$$
$$\rho \sin\varphi' = (1-c)\,\rho_0 \sin\varphi_,$$

und bezeichnet man die Polhöhe des Beobachtungsortes mit φ, dann erhält man aus dieser $\varphi_,$ durch die folgende Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi_, = (1-c)\operatorname{tg}\varphi$$

Die Gleichungen für die Ein- und Austritte werden hiemit

$$u = u' - m\rho_0\{(1-c)\sin\varphi_,\sin\delta' + \cos\varphi_,\cos\delta'\cos(t+\Delta\alpha')\}\operatorname{tg}f$$
$$u\sin\theta = -\gamma\cos N' + \tfrac{t-\lambda-\mu}{15}\,n\sin N' - m\rho_0\cos\varphi_,\sin(t+\Delta\alpha')$$
$$u\cos\theta = \gamma\sin N' + \tfrac{t-\lambda-\mu}{15}\,n\cos N' - m\rho_0\{(1-c)\sin\varphi_,\cos\delta' - \cos\varphi_,\sin\delta'\cos(t+\Delta\alpha')\}$$

und die unbekannte, zu bestimmende Grösse ist ρ_0. Denn da dem Vorhergehenden zufolge ρ_0 durch diese Gleichungen in Theilen der mittleren Entfernung der Sonne von der Erde erhalten wird, so ist

$$\rho_0 = \sin\pi'_0$$

wenn π'_0 die Aequatoreal-Horizontal-Parallaxe der Sonne bezeichnet.

14.

Um die eben erhaltenen Gleichungen ihrem Zwecke mehr anzupassen, führe ich erst die Grössen d und D ein, die durch die folgenden Ausdrücke erhalten werden,

$$d\sin D = \sin\delta'$$
$$d\cos D = (1-c)\cos\delta'$$

und setze darauf

$$\cos\varphi_,\sin(t+\Delta\alpha') = \cos H\sin K$$
$$\cos\varphi_,\cos(t+\Delta\alpha') = \cos D\sin H - \sin D\cos H\cos K$$
$$\sin\varphi_, = \sin D\sin H + \cos D\cos H\cos K$$



in welchen sehr nahe H die Höhe des Punktes (α', δ') über dem Horizont, und K der parallactische Winkel an demselben sind. Führt man diese Substitutionen in die Gleichungen des vor. Art. ein, und lässt die beiden immer unmerklichen Glieder weg, welche mit dem Produkt $c \operatorname{tg} f$ multiplicirt sind, so bekommt man

$$u = u' - m\varrho_0 \operatorname{tg} f \sin H$$
$$u \sin\theta = -\gamma \cos N' + \frac{t-\lambda-\mu}{15} n \sin N' - m\varrho_0 \cos H \sin K$$
$$u \cos\theta = \gamma \sin N' + \frac{t-\lambda-\mu}{15} n \cos N' - m\varrho_0 d \cos H \cos K$$

15.

Setzt man um mehr zusammen ziehen zu können

$$S \sin \Sigma' = \gamma$$
$$S \cos \Sigma' = \frac{t-\lambda-\mu}{15} n$$

so gehen die beiden letzten Gleichungen des vor. Art. in die folgenden über,

$$u \sin\theta = S \sin(N' - \Sigma') - m\varrho_0 \cos H \sin K$$
$$u \cos\theta = S \cos(N' - \Sigma') - m\varrho_0 d \cos H \cos K$$

die man leicht durch die Substitution

$$l \sin L = \sin K$$
$$l \cos L = d \cos K$$

auf die folgende noch einfachere Form bringt,

$$u \cos(\theta - L) = S \cos(W' - \Sigma') - m\varrho_0 l \cos H$$
$$u \sin(\theta - L) = S \sin(W' - \Sigma')$$

wo

$$W' = N' - L$$

ist. Erhebt man diese Gleichungen ins Quadrat und addirt sie, so ergiebt sich

$$m^2\varrho_0^2 l^2 \cos^2 H - 2m\varrho_0 l S \cos H \cos(W' - \Sigma') + S^2 - u^2 = 0$$

welche als die strenge Gleichung zur Bestimmung der Sonnenparallaxe aus einem beobachteten Ein- oder Austritt eines Venusvorüberganges vor der Sonne bezeichnet werden kann. *) Zwar ist diese Gleichung in der vorstehenden Form nicht vollständig entwickelt, da

$$u = u' - m\varrho_0 \operatorname{tg} f \sin H$$

*) Diese Gleichung ist mit der Gleichung (40) des Art. 55 der oft angezogenen Abhandlung identisch.

und also Function der Unbekannten ist. Aber obgleich die vollständige Entwickelung mit Leichtigkeit ausgeführt werden könnte, und die quadratische Gleichung nur wenig zusammengesetzter machen würde, so unterlasse ich doch diese Entwickelung. Der Grund davon ist der, dass das Glied $m\rho_0 \operatorname{tg} f \sin H$ immer sehr klein ist und so geringe Wirkung auf das Resultat äussert, dass man es mit Zugrundelegung des gegenwärtig angenommenen Werthes der Sonnenparallaxe berechnen darf, und demzufolge u als eine völlig bekannte Grösse betrachtet werden kann. *)

Die Auflösung der obigen quadratischen Gleichung giebt

$$\rho_0 = \frac{S\cos(W'-\Sigma) \mp \sqrt{u^2 - S^2 \sin^2(W'-\Sigma)}}{m\,l\cos H}$$

oder wenn man

$$\sin w = \frac{S}{u}\sin(W'-\Sigma)$$

setzt,

$$\rho_0 = \frac{S\cos(W'-\Sigma) \mp u\cos w}{m\,l\cos H}$$

Diese einfachen Ausdrücke leiden indess an dem Umstande, dass die beiden Glieder, aus welchen der Zähler des Ausdrucks von ρ_0 besteht, viel grösser als ihr Unterschied sind, welcher immer anzuwenden ist. Wenn man diesen Umstand vermeiden will, so muss man die quadratische Gleichung indirect auflösen und zu dem Ende

$$\rho_0 = \frac{(S+u)(S-u) + \rho_0^2 m^2 l^2 \cos^2 H}{2mlS\cos H\cos(W'-\Sigma)}$$

setzen. Bei der Berechnung von ρ_0 aus diesem Ausdruck lässt man in der ersten Annäherung das zweite Glied des Zählers weg, setzt in der zweiten Annäherung in demselben den Werth von ρ_0, der die erste Annäherung gegeben hat, u. s. f. Man wird finden, dass die Annäherungen sehr schnell auf das richtige Resultat führen.

16.

Bei der Ableitung der im vor. Art. erhaltenen Endgleichung für die Bestimmung der Sonnenparallaxe haben wir bis jetzt nur Ein- und Austritte der Venus vor Augen gehabt, aber diese Gleichung ist einer

---

*) Im Verlaufe dieses Aufsatzes wird übrigens gezeigt werden, dass in der Anwendung in dieser Gleichung am Zweckmässigsten für ρ_0 ein genäherter Werth substituirt, und darauf u als Unbekannte derselben betrachtet werden kann. Diese Behandlung derselben vermeidet gänzlich die Elimination von u durch u'.

weit ausgedehnteren Anwendung fähig. Die Beobachtungen der Ein- und Austritte kann man definiren als Beobachtungen der Zeitpunkte, in welchen die scheinbaren Entfernungen der Mittelpunkte der Venus und der Sonne der Summe oder dem Unterschiede ihrer scheinbaren Halbmesser gleich ist. Diese Beobachtungen sind also eigentlich Distanzbeobachtungen, in welchen die zu beobachtenden Distanzen nur zwei, sich von selbst darbietende und beobachtungsfähige Werthe annehmen.

Man gelangt hievon leicht zu dem Schlusse, dass dieselbe Endgleichung sich auch auf jede andere, anderweitig beobachtete Distanz muss anwenden lassen können, wenn zugleich mit derselben der Zeitpunkt, in welchem sie statt findet, beobachtet wird. Um die Endgleichung hiefür anzuwenden, ist nichts weiter erforderlich, als die Zeit der besonders beobachteten Distanz und den derselben entsprechenden Werth von u darin zu substituiren.

Die Vornahme von Distanzmessungen während des Vorüberganges der Venus vor der Sonnenscheibe muss als ein sehr wichtiges Hülfsmittel zur möglichst sicheren Bestimmung der Sonnenparallaxe aus dieser Erscheinung bezeichnet werden, da man sie wiederholen und dadurch den Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler wesentlich vermindern kann. Die Beobachtungen der Ein- und Austritte sind im Gegentheil keiner Wiederholung fähig.

Die Vornahme von Distanzmessungen während eines Vorüberganges der Venus vor der Sonnenscheibe ist daher sehr zu empfehlen.

17.

Die Lösung der Aufgabe: aus einer gemessenen scheinbaren Entfernung der Mittelpunkte oder der Ränder der Sonne und der Venus die Sonnenparallaxe zu finden, führt daher in erster Instanz auf die Aufgabe: aus der gemessenen Entfernung den entsprechenden Werth von u zu finden, und die soll jetzt vorgenommen werden.

In Bezug auf Messungen von Entfernungen der Mittelpunkte ist diese Aufgabe schon im Art. 104 der oft angezogenen Abhandlung strenge gelöst, der dort gegebene strenge Ausdruck ist, wenn man die hier eingeführte Einheit der linearischen Grösse anwendet,

$$\operatorname{tg} b = \frac{mru}{Z(Z+mr) - (2Z+mr)z + z^2 + u^2}$$

wo b die gemessene Entfernung der Mittelpunkte bezeichnet. Wir dürfen aber hier unbedenklich z^2 und u^2 übergehen und

$$Z = mr_{,}\,, \quad z = m\varrho_0 \sin H\,, \quad r_{,} + r = r'$$

setzen, womit die vorstehende Gleichung durch eine leichte Umstellung

$$u = (r_{,}r' - (r_{,} + r')\,\varrho_0 \sin H)\,\frac{m}{r}\,\mathrm{tg}\,b$$

giebt. Es ist leicht einzusehen, dass der Ausdruck für u für beobachtete Ränderentfernungen, dem für Ränderberührungen vermindert um den vorstehenden Ausdruck gleich sein muss, nachdem in dem letzteren statt b die beobachtete Ränderentfernung, die mit b' bezeichnet werden soll, substituirt worden ist. Bezeichnet man daher zur Unterscheidung den Werth von u für die Ränderberührungen mit (u), so wird für gemessene Ränderentfernungen

$$\pm u = (u) - (r_{,}r' - (r_{,} + r')\,\varrho_0 \sin H)\,\frac{m}{r}\,\mathrm{tg}\,b'$$

Es sind hier vier Fälle zu unterscheiden.

1) Wenn die Entfernung der nächsten Venus- und Sonnenränder gemessen worden ist, so muss der Werth von (u) für innere Ränderberührungen, nebst dem oberen Zeichen des vorstehenden Ausdrucks angewandt werden.

2) Ist die Entfernung des entgegengesetzten Venusrandes vom nächsten Sonnenrande gemessen, so muss der Werth von (u) für äussere Berührungen, und wieder das obere Zeichen angewandt werden.

3) Ist die Entfernung der am Weitesten von einander abstehenden Venus- und Sonnenränder gemessen, so ist wieder der Werth von (u) für äussere Ränderberührungen, aber das untere Zeichen des vorstehenden Ausdrucks anzuwenden.

4) Ist die Entfernung des gegenüber stehenden Venusrandes von dem entferntesten Sonnenrande gemessen, so ist der Werth von (u) für innere Ränderberührungen nebst dem unteren Zeichen anzuwenden.

18.

Wir kommen jetzt an eine sehr wichtige Untersuchung, die darin besteht, die Beobachtungsörter, an welchen die Sonnenparallaxe möglichst sicher bestimmt werden kann, von denjenigen zu unterscheiden, an welchen sie nur unsicher, oder gar nicht bestimmt werden kann. Der blose Anblick der Ausdrücke des Art. 15 für ϱ_0 zeigt schon, dass die Sonnenparallaxe nicht durch Beobachtungen im Zenith, oder nahe demselben bestimmt werden kann, weil dort $\cos H = 0$, oder sehr klein

wird. Es geht hieraus schon hervor, dass jedenfalls die günstigen Beobachtungsörter so ausgewählt werden müssen, dass die Höhe der Sonne während der Erscheinung des Venusvorüberganges eine gewisse Grenze nicht übersteigt.

Aber es kommen noch andere Umstände mit in Betracht, von welchen hier schon, zufolge des zweiten im Art. 15 für ϱ_0 erhaltenen Ausdrucks, gesagt werden kann, dass während der Beobachtung auch $\cos(W' - \Sigma')$ nicht Null oder klein sein darf, wenn gleich $\cos H$ möglichst gross ist. Diese und noch andere Umstände, die bei der Auswahl der Beobachtungsörter in Betracht kommen, lernt man am Besten durch die Untersuchung des Differentials der Gleichung für ϱ_0 kennen.

19.

Wir könnten zur Erlangung dieses Differentials von der quadratischen Gleichung für ϱ_0 ausgehen, aber einfacher verfährt man, wenn man die Gleichungen des Art. 15 benutzt, aus welchen die quadratische Gleichung hervorgegangen ist. Auch braucht man diese hier nicht in ihrer vollen Strenge anzuwenden, sondern kann $l = 1$ setzen, wodurch $L = K$ wird. Diese sind demnach die folgenden

$$u\cos(\theta - K) = S\cos(N' - K - \Sigma') - m\varrho_0\cos H$$
$$u\sin(\theta - K) = S\sin(N' - K - \Sigma')$$

Differentiirt man diese, indem man alles ausser N' und m veränderlich setzt, so bekommt man

$$\begin{aligned}\cos(\theta-K)\,du - u\sin(\theta-K)\,d(\theta-K) = {}& \\ \cos(N'-K-\Sigma')\,dS + S\sin(N'-K-\Sigma')\,d(K+\Sigma')& \\ + m\varrho_0\sin H dH - m\cos H d\varrho_0&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\theta-K)\,du + u\cos(\theta-K)\,d(\theta-K) = {}& \\ \sin(N'-K-\Sigma')\,dS - S\sin(N'-K-\Sigma')\,d(K+\Sigma')&\end{aligned}$$

Eliminirt man hieraus $d(\theta-K)$, und benutzt darauf die Gleichung

$$0 = S\sin(N'-\Sigma'-\theta) + m\varrho_0\cos H\sin(\theta-K)$$

die aus den vorstehenden Gleichungen leicht hervorgeht, so bekommt man

$$\begin{aligned}\cos H\cos(\theta-K)\,d\varrho_0 = {}& \varrho_0\sin H\cos(\theta-K)\,dH \\ & - \varrho_0\cos H\sin(\theta-K)\,dK \\ & + \frac{1}{m}\cos(N'-\Sigma'-\theta)\,dS \\ & + \frac{S}{m}\sin(N'-\Sigma'-\theta)\,d\Sigma' \\ & - \frac{du}{m}\end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, dass man ohne Weiteres $d\varrho_0$ in Secunden ausgedrückt erhält, wenn die Differentiale rechter Hand alle in Secunden ausgedrückt werden.

20.

Die Gleichungen des Art. 14 für H und K lassen sich leicht auf die folgende Form bringen, die auch später Anwendung finden wird,

$$\cos H \sin K = \cos\varphi_, \sin(t + \Delta\alpha')$$
$$\cos H \cos K = \sin\varphi_, \cos D - \cos\varphi_, \sin D \cos(t + \Delta\alpha')$$
$$\sin H = \sin\varphi_, \sin D + \cos\varphi_, \cos D \cos(t + \Delta\alpha')$$

durch deren Differentiation man erhält,

$$-\sin H \sin K dH + \cos H \cos K dK = \cos\varphi_, \cos(t + \Delta\alpha')\, dt$$
$$-\sin H \cos K dH - \cos H \sin K dK = \cos\varphi_, \sin D \sin(t + \Delta\alpha')\, dt$$

Aus den Gleichungen

$$S \sin\Sigma = \gamma$$
$$S \cos\Sigma = \frac{n}{15}(t - \lambda - \mu)$$

zieht man

$$\sin\Sigma dS + S \cos\Sigma d\Sigma = 0$$
$$\cos\Sigma dS - S \sin\Sigma d\Sigma = \frac{n}{15} d(t - \lambda)$$

Um diese Gleichungen so einzurichten, dass sie die Differentiale der linken Seite in Bogensecunden ausgedrückt geben, während das Differential $d(t-\lambda)$ in Zeitsecunden ausgedrückt wird, muss die rechte Seite der zweiten mit dem Factor

$$\frac{R}{240}$$

wo $R = 206265''$ ist, multiplicirt werden. Diese beiden Gleichungen werden daher

$$\sin\Sigma dS + S \cos\Sigma d\Sigma = 0$$
$$\cos\Sigma dS - S \sin\Sigma d\Sigma = \frac{nR}{3600} d(t - \lambda)$$

Endlich giebt der zweite Ausdruck für u des Art. 17 mit Weglassung des immer sehr kleinen mit ϱ_0 multiplicirten Gliedes

$$\pm du = -\frac{r_, r'}{r} m db'$$

und durch Substitution der hier erhaltenen Ausdrücke geht daher die Differentialgleichung des vor. Art. in die folgende über,

$$\begin{aligned}\cos H \cos(\theta - K)\, d\varrho_0 = \\ &-\varrho_0 \cos\varphi_, \{\sin\theta \cos(t + \Delta\alpha') + \sin D \cos\theta \sin(t + \Delta\alpha')\}\, dt \\ &+ \frac{Rn}{3600\, m} \cos(N' - \theta)\, d(t - \lambda) \\ &\pm \frac{r_, r'}{r} db'\end{aligned}$$

Da die Function

$$\sin\theta\cos(t+\Delta\alpha') + \sin D\cos\theta\sin(t+\Delta\alpha')$$

nie grösser wie Eins werden kann, und nahe

$$\rho_0 = 0.0000431$$

ist, so kann das erste Glied rechter Hand der vorstehenden Gleichung hier immer übergangen werden, und man kann daher setzen

$$\cos H\cos(\theta-K)\,d\rho_0 = \frac{Rn}{3600\,m}\cos(N'-\theta)\,d\,(t-\lambda)$$
$$\pm\frac{r_{\prime}r'}{r}\,db'$$

Die numerischen Werthe der beiden Glieder rechter Hand dieser Gleichung sollen weiter unten untersucht werden, während die Untersuchung des Coefficienten linker Hand sogleich vorgenommen werden wird.

21.

Aus dem für $d\rho_0$ so eben erhaltenen Ausdruck ist ersichtlich, dass der numerische Werth, den die Function

$$\cos H\cos(\theta-K)$$

annimmt, sehr grossen Einfluss auf die Sicherheit der Bestimmung der Sonnenparallaxe aus einem Venusvorübergange vor der Sonnenscheibe ausübt, da er als Divisor in alle Glieder des Ausdrucks für $d\rho_0$ eintritt. Die günstigsten Fälle sind also *ceteris paribus* diejenigen, in welchen diese Function möglichst gross wird.

Der Maximalwerth, den $\cos H\cos(\theta-K)$ überhaupt annehmen kann, ist augenscheinlich $= \pm 1$, und trifft nur ein, wenn zugleich

$$\cos H = 1, \text{ und } \cos(\theta-K) = \pm 1$$

sind. Dieser Maximalwerth kann also nur eintreffen, wenn die Erscheinung, die man beobachten will, sei sie Ein- oder Austritt, oder sei sie Distanzmessung, im Horizont vor sich geht. Aber im Horizont und in der Nähe desselben lassen sich selten oder nie gute Beobachtungen anstellen, ja man kann im Allgemeinen kaum in dieser Region auf die Sichtbarkeit des zu beobachtenden Gegenstandes rechnen, wenn gleich diese in höheren Höhengraden in erwünschtem Maasse statt findet. Man muss sich daher jeden Falls mit einem kleineren Werthe der genannten Function begnügen, und den günstigen Umstand benutzen, dass die Abnahme des Maximalwerthes in den unteren Höhengraden nur geringe ist. Bei $H = 40^0$ z. B. ist $\cos H = 0.766$, und der Maximalwerth unserer

Function also immer noch ein Weniges grösser als $\frac{1}{4}$ des Maximums Maximorum.

Wenn $\cos H \cos(\theta - K) < \pm 1$ ist, so entsprechen jedem, übrigens ungeänderten Werthe derselben eine Reihe von Punkten auf der Erdoberfläche, die sich zu einer stetigen Curve vereinigen, auf welcher $\cos H$ sich zwischen den Werthen 1 und k, so wie $\cos(\theta - K)$ sich zwischen den Werthen ± 1 und $\pm k$ bewegt, je nachdem der Werth der Function $= + k$ oder $= - k$ ist.

Zu bemerken ist hiebei, dass von den Werthen $+ k$ und $- k$ gemeiniglich immer der eine auf der nördlichen und der andere auf der südlichen Halbkugel der Erde statt findet, und dass auf den entsprechenden Curvenpunkten die unvermeidlichen Beobachtungsfehler im entgegengesetzten Sinne auf die Sonnenparallaxe einwirken.

22.

Beschäftigen wir uns zuerst mit der Bedingung

$$\cos(\theta - K) = \pm 1$$

so bekommen wir sogleich

$$\theta = K, \text{ oder } = 180^0 + K$$

aber nennen wir θ_0 den Positionswinkel, vorläufig blos des Ein- oder Austritts der Venus, in Bezug auf den Verticalkreis, in welchem sich der im Vorhergehenden erklärte Punkt (α', δ') befindet, für welchen hier ohne Nachtheil der Sonnenmittelpunkt angenommen werden kann, so folgt aus der oben erklärten Bedeutung von θ und K leicht, dass immer

$$\theta_0 = \theta - K$$

ist, und in Folge dessen geht die eben eingeführte Bedingung in

$$\cos \theta_0 = \pm 1$$

über und giebt

$$\theta_0 = 0, \text{ oder } = 180^0$$

Da nun überhaupt, wie schon oben erwähnt wurde, die Bedingung

$$\cos H \cos \theta_0 = k$$

wo k constant ist Grundgleichung einer Anzahl von Curven auf der Erdoberfläche ist, und unter diesen sich diejenigen auszeichnen, denen ausserdem die Bedingung $\cos \theta_0 = \pm 1$ zukommt, so sollen diese letzteren die Haupthöhencurven genannt werden, und wir erhalten daher sogleich den

Lehrsatz.

»Auf allen Punkten irgend einer Haupthöhencurve auf der Erd-»oberfläche liegen während der Ein- oder Austritte der Venus die Mit-»telpunkte der Sonne und der Venus in einem und demselben Vertical-»kreise.«

Da nun für jeden Werth von H die Bedingung $\cos\theta_0 = \pm 1$ dem Maximum der Function $\cos H \cos\theta_0$ entspricht, so folgt, dass abgesehen von dem Werthe von H, die günstigsten Beobachtungsörter für die Bestimmung der Sonnenparallaxe aus Venusvorübergängen vor der Sonne diejenigen sind, auf welchen im Augenblick der Beobachtung die Mittelpunkte der Venus und der Sonne in einem und demselben Verticalkreise liegen. Dieses Kriterion kann der Beobachter ohne Weiteres erblicken, und mit den Augen verfolgen.

Das Gegentheil dieses Satzes findet auch statt, nemlich die Oerter, auf welchen die zu beobachtende Erscheinung unter einem Positionswinkel von nahe 90° oder 270° in Bezug auf den Verticalkreis eintrifft, sind zur Bestimmung der Sonnenparallaxe untauglich, und dieselbe wird absolut unmöglich wenn

$$\theta_0 = 90^\circ, \text{ oder } = 270^\circ$$

ist.

23.

Kehren wir einen Augenblick zur Bedingung

$$\cos H \cos\theta_0 = \pm 1$$

zurück, so müssen wir nothwendig $H = 0$ setzen, während die Bedingung $\theta_0 = 0$, oder $= 180^\circ$ fortbesteht. Aber das Zusammentreffen dieser beiden Bedingungen bedingt die Berührungspunkte des Schattenkegels der Venus und der Sonne mit dem Erdkörper (S. Abhandlung Art. 45, Gl. (34) *), und jede Haupthöhencurve hat daher in einem Berührungspunkt des genannten Schattenkegels mit der Erde ihren Anfangspunkt, von welchem sie ausgeht, oder wenn man sich so ausdrücken will, ihr Ende erreicht. Es folgt ferner hieraus, dass die Anzahl der Haupthöhencurven der der genannten Berührungspunkte gleich kommt.

---

*) Nemlich $\operatorname{tg}\theta = d \operatorname{tg} K$, also mit Uebergehung der Abplattung, $\theta = K$, oder $= 180^\circ + K$, wie oben.

Man kann vorzugsweise drei Schattenkegel von einander unterscheiden, nemlich den für äussere Berührungen, den für den Mittelpunkt der Venus, und den für innere Berührungen. Da nun jeder Schattenkegel die Erde vier Mal berühren kann, so folgt dass zwölf Haupthöhencurven aufgestellt werden können. Da jedoch diese drei Schattenkegel, der Kleinheit des Venushalbmessers in Vergleich zum Sonnenhalbmesser wegen, nur wenig von einander verschieden sind, so liegen je drei der Haupthöhencurven nicht weit von einander und es gnügt daher in der Vorausberechnung eines Venusvorüberganges nur vier Haupthöhencurven von einander zu unterscheiden, für welche am Zweckmässigsten die dem Venusmittelpunkt angehörigen gewählt werden.

24.

Da die Haupthöhencurven eine so wichtige Bedeutung haben, so wird es angemessen sein, die Ausdrücke, nach welchen sie zu berechnen sind, ausführlich anzugeben. Nehmen wir zu dem Ende die Gleichungen des Art. 15 wieder vor, die wir jetzt, wenn wieder $l = 1$ gesetzt wird, wie folgt schreiben können,

$$u \cos \theta_0 = S \cos (W - \Sigma) - m \varrho_0 \cos H$$
$$u \sin \theta_0 = S \sin (W - \Sigma)$$

wo

$$W = N' - K$$

ist. Die Bedingung $\cos \theta_0 = \pm 1$ giebt hier $\sin (W - \Sigma) = 0$, und da S und u immer positiv sein müssen,

$$S = u \pm m \varrho_0 \cos H$$

durch welche man, wenn man H von 0 bis 90° wachsen lässt, eine doppelte Reihe von Werthen von S erhält, worauf man für jeden dieser, wieder zwei Werthe von Σ durch die Gleichung

$$\sin \Sigma = \frac{\gamma}{S}$$

erhält. Wenn γ positiv ist, so liegen die zwei jedem Werthe von S zukommenden Werthe von Σ im ersten, und wenn γ negativ ist, im zweiten Halbkreise. Stellt man nun die Regel auf, dass man von diesen Werthen nur denjenigen in Betracht ziehe, welcher im ersten, oder bez. im vierten Quadranten liegt, so entspringen die folgenden vier Werthe von W und τ, die die vier, dem für u zu Grunde gelegten Werthe entsprechenden, Haupthöhencurven geben,

$$W = \Sigma' \qquad , \quad W = 180^0 - \Sigma'$$
$$\tau = \mu + \frac{15}{n} S \cos\Sigma' \ , \quad \tau = \mu - \frac{15}{n} S \cos\Sigma'$$
$$W = 180^0 + \Sigma', \quad W = 360^0 - \Sigma'$$
$$\tau = \mu + \frac{15}{n} S \cos\Sigma' \ , \quad \tau = \mu - \frac{15}{n} S \cos\Sigma'$$

und zwar sind die beiden ersten dieser mit Anwendung der Werthe von S und Σ' zu berechnen, die aus

$$S = u + m\,\varrho_0 \cos H$$

und die beiden letzten mit den Werthen, die aus

$$S = u - m\,\varrho_0 \cos H$$

entsprungen sind.

Die Längen und Breiten der Curvenpunkte sind hierauf durch die betreffenden Gleichungen des Art. 14 zu berechnen, die zu dem Ende wie folgt gestellt werden können. Da $K = N' - W$ ist, so rechne man die Hülfsbögen P und Q durch die folgenden Gleichungen

$$\cos P \sin Q = \sin H$$
$$\cos P \cos Q = \cos H \cos(N' - W)$$
$$\sin P = \cos H \sin(N' - W)$$

wo Q immer so zu bestimmen ist, dass $\cos P$ positiv wird, hierauf erhält man

$$\cos\varphi_, \sin(t + \Delta\alpha') = \sin P$$
$$\cos\varphi_, \cos(t + \Delta\alpha') = \cos P \sin(Q - D)$$
$$\sin\varphi_, = \cos P \cos(Q - D)$$
$$\lambda = t - \tau$$

Die Abplattung ist zwar in den vorhergehenden Ausdrücken nicht vollständig berücksichtigt, aber ihre grösste Wirkung ist darin eingeschlossen; es wäre ein Leichtes sie vollständig aufzunehmen, aber ich halte dieses im gegenwärtigen Falle für überflüssig.

Es ist noch hierzu zu bemerken, dass von den vier Haupthöhencurven, deren Berechnung im Vorstehenden erklärt worden ist, zwei und zwei, und zwar die beiden für die Eintritte und die beiden für die Austritte, im Punkte $H = 90^0$ sich an einander anschliessen, und zu Einer stetigen Curve vereinigen.

25.

Die Resultate der vorstehenden Untersuchungen, die bisher nur auf Ein- und Austritte ausgedehnt worden sind, gewinnen bedeutend

an Ausdehnung, wenn man erwägt, dass die beiden Gleichungen des Art. 22, aus welchen sie abgeleitet worden sind, nicht unumgänglich verlangen, dass für u der Werth darin substituirt werde, welcher den Ränderberührungen zukommt, sondern dass man darin für u jeden Werth substituiren darf, welcher irgend einer möglichen Phase entspricht.

Es folgt hieraus unmittelbar, dass der im Art. 22 bewiesene Lehrsatz, und die Folgerungen, die daraus gezogen wurden, nicht blos auf Ein- und Austritte, sondern auf jede mögliche Phase bezogen werden können, und für jede mögliche Phase Geltung haben.

Unter den verschiedenen möglichen Phasen ist die grösste Phase besonders in Betracht zu ziehen, da für diese einige der angeführten Umstände etwas anders sind, und daher die Rechnung etwas anders ausgeführt werden muss.

In Betreff der Curve der grössten Phase im Horizont ist zu bemerken, dass sie nur zwei Punkte besitzt, die den vier Berührungspunkten des Schattenkegels mit der Erde analog sind, und daher in Bezug auf die grösste Phase selbst nur zwei Haupthöhencurven vorhanden sind. Die Anfangs- oder Endpunkte dieser beiden Haupthöhencurven entsprechen auf der Curve der grössten Phase im Horizont, den beiden Punkten, in welchen diese Phase sich in ihrem Maximum und in ihrem Minimum befindet.

26.

Da im gegenwärtigen Falle der Halbmesser des Schattenkegels u eine Unbekannte ist, während sie in allen anderen Fällen bekannt ist, so muss die Berechnung der beiden hiezu gehörigen Haupthöhencurven etwas anders ausgeführt werden, wie im Art. 24 in Bezug auf die anderen Haupthöhencurven gezeigt wurde.

Nehmen wir die Bedingungsgleichung für die grösste Phase vor, die im Art. 43 der oft angezogenen Abhandlung gefunden wurde. Nach einigen Abkürzungen, die wir uns hier erlauben dürfen, wird diese Gleichung die folgende,

$$\left\{\frac{n}{\varkappa m \varrho_0} + \cos H \sin D \sin W \mp \sin H \cos D \sin N'\right\} \cos\psi$$
$$+ \left\{\cos H \sin D \cos W - \sin H \cos D \cos N'\right\} \sin\psi = 0$$

in welcher

$$\varkappa = \frac{15\ (3600)}{206265},\ \log\varkappa = 9.41797 - 10$$

und

$$\psi = \theta - N'$$

sind. Hiemit bekommt man aus den Gleichungen des Art. 14, wenn auch $d = 1$ gesetzt wird, leicht

$$u = \frac{m\varrho_0 \cos H \sin W - \gamma}{\sin\psi}$$

Da $\theta_0 = \theta - K$ ist, so folgt aus der obigen Gleichung für ψ ferner, dass

$$\theta_0 = \psi + N' - K = \psi + W$$

und da dem Vorhergehenden zufolge auf jeder Haupthöhencurve

$$\theta_0 = 0, \text{ oder } = 180^\circ$$

ist, so wird hier

$$W = -\psi, \text{ oder } = 180^\circ - \psi$$

Substituirt man diese Werthe von W sowohl in die Bedingungsgleichung für die grösste Phase, wie in den Ausdruck für u, so wird in beiden Fällen

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\frac{n}{\varkappa m \varrho_0} - \sin H \cos D \sin N'}{\sin H \cos D \cos N'}$$

aber für $W = -\psi$

$$u = -\frac{m\varrho_0 \cos H \sin\psi + \gamma}{\sin\psi}$$

und für $W = 180^\circ - \psi$

$$u = \frac{m\varrho_0 \cos H \sin\psi - \gamma}{\sin\psi}$$

Diese Gleichung für ψ lässt den Halbkreis, in welchem ψ zu nehmen ist, unbestimmt, aber die hinzu kommende Bedingung dass u immer positiv werden muss, bestimmt ψ vollständig. Hat man hiemit ψ und u berechnet, so bekommt man nicht nur W durch die obigen Ausdrücke, sondern auch in beiden Fällen $\Sigma = -\psi$, und hiemit

$$\tau = \mu - \frac{15}{n}\gamma \operatorname{cotg}\psi$$

Aus H, W, τ bekommt man λ und φ durch die betreffenden Ausdrücke des Art. 24. Die beiden hier betrachteten Haupthöhencurven schliessen sich auch im Punkt, welcher $H = 90^\circ$ angehört, an einander und vereinigen sich zu Einer Curve.

Als Schlussbetrachtung kann hier noch angeführt werden, dass die Haupthöhencurven für die Eintritte, die grösste Phase, und die Austritte auf der Erdoberfläche oft weit aus einander liegen, und dass daher

gemeiniglich die günstigsten Beobachtungsörter für diese drei Erscheinungen auch oft weit aus einander liegen.

27.

Im Vorhergehenden haben wir die Function $\cos H \cos \theta_0$ nur in dem Falle betrachtet, in welchem $\cos \theta_0 = \pm 1$ ist, also wo sie bei gegebener Sonnenhöhe ein (positives oder negatives) Maximum ist, aber man erkennt ohne Weiteres, dass sie auch bei anderen Werthen von $\cos \theta_0$ denselben Werth annehmen kann, obgleich dieser Fall nur auf Kosten der Sonnenhöhe eintreten kann, die immer kleiner sein wird, als in jenem Falle. Aber man ist nicht immer im Stande die Beobachtungsörter so auswählen zu können, dass auf denselben $\cos \theta_0 = \pm 1$ wird, und daher ist die Ermittelung der Oerter, auf welchen $\cos H \cos \theta_0$ überhaupt einem gegebenen Werthe gleich ist, von besonderer Wichtigkeit. Wir kommen hiedurch auf eine besondere Gattung von Curven, die ich, weil jede derselben in allen ihren Punkten gleichsam dieselbe Macht auf die Bestimmung der Sonnenparallaxe ausübt, die isosthenischen Curven nennen will.

Es dienen zur Ermittelung der isosthenischen Curven wieder die Gleichungen, die im zunächst Vorhergehenden angewandt worden sind, die aber für den gegenwärtigen Zweck auf eine etwas andere Form gebracht werden müssen. Man findet leicht, dass die im Art. 24 angeführten Gleichungen mit den folgenden identisch sind,

$$u = S \cos \chi - m \varrho_0 \cos H \cos \theta_0$$
$$0 = S \sin \chi + m \varrho_0 \cos H \sin \theta_0$$

worin

$$\chi = W - \Sigma' - \theta_0$$

gesetzt worden ist. Jede isosthenische Curve schneidet die betreffende Haupthöhencurve in Einem Punkt, und nennt man die Sonnenhöhe in diesem Durchschnittspunkt $H_{,}$, so können wir die charakteristische Eigenschaft der isosthenischen Curven wie folgt aufstellen,

$$\cos H \cos \theta_0 = \pm \cos H_{,}$$

wo $H_{,}$ constant, und dem Maximum der Höhen H gleich ist. Es ist mit anderen Worten $H_{,}$ die Sonnenhöhe, in dem Durchschnittspunkt der isosthenischen, und der Haupthöhencurven. Aus der vorstehenden Gleichung ergiebt sich zuerst

$$\cos H \sin \theta_0 = \pm \sqrt{\cos^2 H - \cos^2 H_{,}}$$

oder, wenn man

$$\cos\eta = \frac{\cos H_{,}}{\cos H}$$

setzt,

$$\cos H \sin\theta_0 = \pm \cos H_{,} \operatorname{tg}\eta$$

Die obigen Gleichungen geben hiemit

$$S \sin\chi = \pm\, m\varrho_0 \cos H_{,} \operatorname{tg}\eta$$
$$S \cos\chi = u \pm m\varrho_0 \cos H_{,}$$

womit χ und S gegeben sind. Die Gleichungen

$$S \sin\Sigma = \gamma$$
$$S \cos\Sigma = (\tau - \mu)\,\frac{n}{15}$$

in welchen, gleichwie im Art. 12 und später, die in Graden ausgedrückte Zeit des ersten Meridians mit τ bezeichnet ist, geben hierauf wieder

$$\sin\Sigma = \frac{\gamma}{S}$$

$$\tau = \mu + \frac{15}{n}\, S \cos\Sigma$$

aus welchen man Σ und τ erhält. Da wieder jedem Werthe von $\sin\Sigma$ zwei Bögen angehören, so bekommt man auch für jeden Werth von S zwei Werthe von τ, die verschiedenen isosthenischen Curven angehören. Endlich geben die vorhergehenden Gleichungen

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \pm \operatorname{tg}\eta$$

und es gehören daher vier verschiedene Werthe von θ_0 zu jedem Werthe von η, nemlich

$$\theta_0 = \eta$$
$$\theta_0 = 180^0 - \eta$$
$$\theta_0 = 180 + \eta$$
$$\theta_0 = 360 + \eta$$

Ist nun somit auch θ_0 berechnet, so bekommt man für jeden Werth dieses Bogens

$$W = \chi + \Sigma + \theta_0$$

also wegen der zweifachen Werthe von Σ für jeden Werth von S acht Werthe von W. Nachdem somit H, W, τ gegeben sind, erhält man wieder durch die Gleichungen des Art. 24 die Längen λ und die Breiten φ der Curvenpunkte.

28.

Untersuchen wir die numerischen Werthe von χ. Da auf jeder isosthenischen Curve H nur die Werthe von 0 bis $H_{,}$ annehmen kann,

so folgt aus der Gleichung des vor. Art., durch welche η bestimmt wird, dass dieser Bogen sich auch nur von 0 bis $H_{\prime}$ bewegen kann, und hieraus folgt, dass das Maximum von χ durch die Gleichung

$$\sin\chi = \pm \frac{m\varrho_0}{S} \sin H_{\prime}$$

gegeben ist. Aber in den Venusvorübergängen ist nahe

$$m\varrho_0 = 0.0277$$

und wenigstens für die Ein- und Austritte immer nahe

$$S = 1$$

*) substituirt man diese Werthe, und setzt zugleich $H_{\prime} = 90^0$, so wird das Maximum von χ

$$\chi = \pm 1^0\, 35'$$

Dieser Werth von χ ist zugleich das Maximum Maximorum, welches für keinen anderen Werth von $H_{\prime}$ erreicht werden kann. Dieser grösst mögliche Werth von χ ist aber so klein, dass $\cos\chi$ sich nur sehr wenig von dem Werthe $= 1$ entfernen kann, und wenn man daher bei der Berechnung der isosthenischen Curven $\chi = 0$, folglich $\cos\chi = 1$, und

$$S = u \pm m\varrho_0 \cos H_{\prime}$$

setzt, so wird man sehr wenig fehlen. Hiemit werden aber in der ganzen Ausdehnung einer jeden isosthenischen Curve nicht nur S, sondern auch Σ und τ unveränderliche Grössen, und aus dieser Eigenschaft entspringt der

Lehrsatz.

»Jede isosthenische Curve ist ein Kreisbogen, dessen auf der Ku»geloberfläche gemessener Halbmesser $= H_{\prime}$ oder $180^0 - H_{\prime}$ ist, je »nachdem man diesen Halbmesser von dem einen oder dem anderen »Pole dieses Kreises misst.«

29.

Um den eben aufgestellten Lehrsatz zu beweisen, ist nichts weiter zu thun als nachzuweisen, dass sich auf der Kugeloberfläche ein Punkt angeben lässt, dessen Entfernung von allen Punkten irgend einer isosthenischen Curve dieselbe, sowie dass diese Entfernung $= H_{\prime}$ oder bez.

*) Dieser numerische Werth von $m\varrho_0$ ist freilich ein specieller, aus dem Vorübergange des Jahres 1874 entnommener, er kann in anderen Durchgängen wohl etwas anders werden, aber sich nie viel davon entfernen.

$= 180^0 - H_{,}$ ist. Seien Φ und Λ die Breite und Länge irgend eines Punkts auf der Kugel, und wie vorher φ und λ dasselbe für irgend einen Punkt irgend einer isosthenischen Curve; nennt man ausserdem ζ die auf der Kugeloberfläche gemessene Entfernung dieser beiden Punkte, so bekommt man

$$\cos\zeta = \sin\Phi \sin\varphi + \cos\Phi \cos\varphi \cos(\Lambda - \lambda)$$

Seien ferner T, H_0, K_0 in Beziehung auf den eingeführten Punkt dasselbe, was t, H, K für irgend einen Punkt der isosthenischen Curve sind, dann werden

$$\begin{aligned}\cos\Phi \sin(T + \Delta\alpha') &= \cos H_0 \sin K_0 \\ \cos\Phi \cos(T + \Delta\alpha') &= \cos D \sin H_0 - \sin D \cos H_0 \cos K_0 \\ \sin\Phi &= \sin D \sin H_0 + \cos D \cos H_0 \cos K_0\end{aligned}$$

während wie früher für jeden Punkt der isosthenischen Curve die Gleichungen

$$\begin{aligned}\cos\varphi \sin(t + \Delta\alpha') &= \cos H \sin K \\ \cos\varphi \cos(t + \Delta\alpha') &= \cos D \sin H - \sin D \cos H \cos K \\ \sin\varphi &= \sin D \sin H + \cos D \cos H \cos K\end{aligned}$$

statt finden. Erwägt man nun, dass zufolge der Unveränderlichkeit von τ auf jeder einzelnen isosthenischen Curve die Gleichung

$$\Lambda - \lambda = T - t$$

statt findet, und substituirt die vorstehenden Gleichungen in die für $\cos\zeta$, so ergiebt sich

$$\cos\zeta = \sin H_0 \sin H + \cos H_0 \cos H \cos(K_0 - K)$$

Um ζ unveränderlich zu machen, braucht man nur

$$H_0 = 0\,, \quad \text{und} \quad K_0 = \theta_0 + K$$

zu setzen, denn alsdann geht vermöge der Gleichung

$$\cos H \cos\theta_0 = \pm \cos H_{,}$$

der vorstehende Ausdruck in

$$\cos\zeta = \mp \cos H_{,}$$

oder

$$\zeta = H_{,}\,, \quad \text{oder} = 180^0 - H_{,}$$

über, womit der Lehrsatz bewiesen ist. Die Pole der isosthenischen Kreisbögen, wie wir sie jetzt nennen können, sind durch die vorstehenden Werthe von H_0 und K_0 gegeben, deren zweiter wegen der Gleichungen

$$W = N' - K = \chi + \Sigma + \theta_0 \quad \text{und} \quad \chi = 0$$

für K_0 den Ausdruck

$$K_0 = N' - \Sigma$$

giebt. Den oben eingeführten Gleichungen zufolge werden daher Φ und $\varLambda$ durch die folgenden Gleichungen erhalten,

$$\begin{aligned}
\cos\Phi \sin(T + \Delta\alpha') &= \sin(N' - \Sigma) \\
\cos\Phi \cos(T + \Delta\alpha') &= -\cos(N' - \Sigma)\sin D \\
\sin\Phi &= \cos(N' - \Sigma)\cos D
\end{aligned}$$

$$\varLambda = T - \tau$$

Die Werthe von Φ und $\varLambda$, die hieraus hervorgehen, sind die Breite und Länge des einen Pols auf der Kugeloberfläche, und es folgt hieraus von selbst, dass $-\Phi$ und $180^0 + \varLambda$ die Breite und Länge des anderen Pols sind. Da diese Werthe sich für jeden anderen isosthenischen Kreisbogen ändern, so sind diese Kreisbögen nicht concentrisch, nur für sehr kleine Werthe von $H_{,}$ können sie annähernd für concentrisch gehalten werden, aber schon für einiger Maassen grosse Werthe von $H_{,}$ weichen sie stark von der Concentricität ab.

Im Allgemeinen gehören die isosthenischen Kreisbögen kleineren Kreisen auf der Kugeloberfläche an, und nur für $H_{,} = 90^0$ gehen sie in einen Bogen grössten Kreises über. Dieser bestimmt die Oerter der Erdoberfläche, auf welchen der Coefficient des Differentials der Sonnenparallaxe Null ist, und auf welchen also die Bestimmung dieser Parallaxe absolut unmöglich ist.*)

Der vorstehenden Ableitung zufolge sind diese isosthenischen Kreisbögen nicht die vollkommen strengen Werthe der isosthenischen Curven, allein sie kommen diesen so nahe, dass man sie, ohne Gefahr merklich zu fehlen, immer anwenden kann.

30.

Für die zur grössten Phase gehörigen isosthenischen Kreisbögen sind hier keine besonderen Formeln zu entwickeln, da die anzuwendenden Werthe von u dieselben sind, die in der Berechnung der betreffenden beiden Haupthöhencurven sich ergeben haben. Aber die hieher gehörigen isosthenischen Kreisbögen besitzen die Eigenschaft, dass sie

*) Für die Parallaxe der Distanz hat Lagrange zuerst in den Memoiren der Berliner Academie für das Jahr 1766 das Vorhandensein von isosthenischen Kreisen nachgewiesen.



auf der Kugeloberfläche concentrisch sind, welche Eigenschaft, wie wir eben gesehen haben, den den anderen Erscheinungen zukommenden isosthenischen Kreisbögen abgeht. Dieser Satz soll hier bewiesen werden.

Die aus dem Art. 26 zu entnehmenden Ausdrücke für u sind

$$u = -\frac{m\varrho_0 \cos H \sin \psi + \gamma}{\sin \psi}$$

$$u = \frac{m\varrho_0 \cos H \sin \psi - \gamma}{\sin \psi}$$

Da nun, wenn γ positiv ist, ψ so nahe $= 270^0$ wird, dass die Abweichung von $\sin \psi = -1$ jedenfalls übergangen werden kann, und wenn γ negativ ist, ψ so nahe $= 90^0$ wird, dass alsdann ohne Bedenken $\sin \psi = +1$ gesetzt werden kann, so gehen die beiden obigen Ausdrücke in den folgenden einzigen über,

$$u = (\pm \gamma) \mp m\varrho_0 \cos H$$

wo die doppelten Zeichen vor γ so zu wählen sind, dass $(\pm \gamma)$ immer positiv wird. Für die isosthenischen Kreisbögen ist dem Vorhergehenden zufolge,

$$S = u \pm m\varrho_0 \cos H_{,}$$

und da auf diesen $H_{,}$ immer dieselben Werthe annimmt, wie H auf den Haupthöhencurven, so ergiebt sich für jeden der hier in Rede stehenden isosthenischen Kreisbogen

$$S = (\pm \gamma)$$

und ferner

$$\Sigma = 90^0, \quad \text{oder} = 270^0$$

je nachdem γ positiv oder negativ ist, so wie in jedem Falle

$$\tau = \mu$$

Hiemit ist die Concentricität dieser Kreisbögen bewiesen, und man erkennt zugleich, dass ihre Mittelpunkte mit den Anfangspunkten der beiden betreffenden Haupthöhencurven zusammen fallen.

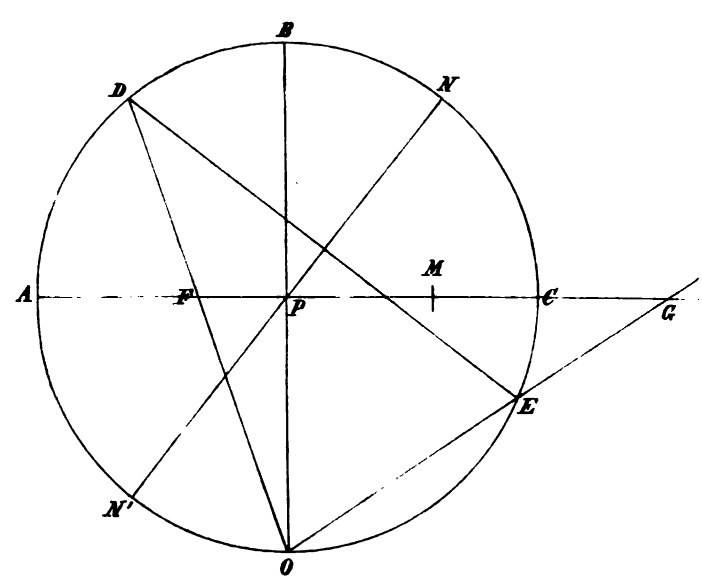
Die vorstehenden, sich auf die zur grössten Phase gehörenden isosthenischen Kreisbögen beziehenden, Regeln erleiden eine Ausnahme, wenn die Venus nahe central vor der Sonnenscheibe vorüber geht. In den beiden zunächst bevorstehenden Vorübergängen ist dieses aber nicht der Fall.

31.

Um einen Ueberblick der ganzen Erscheinung eines Venusvorüberganges zu erhalten, wird es dienlich sein, sowohl die Grenzcurven wie

die Haupthöhencurven und die isosthenischen Kreisbögen auf zwei Planigloben (eine nördliche und eine südliche) aufzuzeichnen, und man wählt für diese am Zweckmässigsten die stereographische Polarprojection. Die Regeln für das Aufzeichnen von Kreisen auf der stereographischen Projection sind allgemein bekannt, und nur für den Fall, dass sie diesem oder jenem nicht sogleich bei der Hand sein sollten, will ich sie hier angeben.

Den Satz, dass jeder (grösster oder kleinerer) Kreis auf der Kugel auf der stereographischen Projection auch ein Kreis ist, nehme ich als bekannt an, und werde daher nur zeigen, wie man den Halbmesser des Kreises und die Coordinaten des Mittelpunkts desselben auf der Projection findet.



Sei der Kreis $OABCO$ die orthographische Projection einer Kugel auf eine Ebene, die durch den Mittelpunkt derselben geht, und DE die orthographische Projection eines kleineren Kreises auf dieser Kugel. Da DE eine grade Linie sein soll, so folgt, dass die Ebene des kleineren Kreises senkrecht auf der Projection stehend gedacht wird, und zieht man daher die Grade NN' senkrecht auf DE und durch den Mittelpunkt der Kugel gehend, so sind die Durchschnittspunkte N und N' mit dem Kreise der Figur die Pole des Kreises DE auf der Kugeloberfläche.

Sei nun O der Augenpunkt der stereographischen Projection, dann liegt diese letztere in der auf der Linie ACG senkrecht auf der orthographischen Projection zu errichtenden Ebene. Zieht man die Graden

OD und OEG, dann ist die Entfernung der Durchschnittspunkte derselben mit AC von einander, oder die Grade FG der Durchmesser des Kreises DE in der stereographischen Projection, und der Halbirungspunkt M der Linie FG ist der Mittelpunkt des Kreises in der Projection.

Sei $H_{,}$ die auf der Oberfläche der Kugel gemessene Entfernung des Kreises DE von dem Pole N desselben, also $ND = NE = H_{,}$, und ψ, ebenfalls auf der Kugeloberfläche, der Abstand des Poles N vom Punkt B, dessen Projection im Mittelpunkt der stereographischen Projection liegt, dann ist $NB = \psi$. Sei endlich r der Halbmesser der stereographischen Projection, welcher der Linie AP oder CP gleich ist.

Aus der Figur folgt nun, dass

$$DB = H_{,} - \psi$$
$$EB = H_{,} + \psi$$

sind, und folglich werden die Winkel

$$DOB = \tfrac{1}{2}(H_{,} - \psi)$$
$$EOB = \tfrac{1}{2}(H_{,} + \psi)$$

so wie die Linien

$$FP = r \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(H_{,} - \psi) = r \frac{\sin H_{,} - \sin\psi}{\cos H_{,} + \cos\psi}$$
$$GP = r \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(H_{,} + \psi) = r \frac{\sin H_{,} + \sin\psi}{\cos H_{,} + \cos\psi}$$

Bezeichnet man ferner den Halbmesser der Projection des Kreises DE, oder die Hälfte der Linie FG mit R, dann wird $2R = FP + GP$, also den vorstehenden Gleichungen zufolge

$$R = r \frac{\sin H_{,}}{\cos H_{,} + \cos\psi}$$

Bezeichnet man ferner den Abstand des Mittelpunkts des Kreises der Projection vom Mittelpunkt dieser, das ist die Linie PM mit k, so wird $2k = GP - FP$, und die Gleichungen geben

$$k = r \frac{\sin\psi}{\cos H_{,} + \cos\psi}$$

Da nun die Linie MP oder k immer in der Projection des grössten Kreises der Kugel liegt, welcher durch den Augenpunkt und die Pole des zu projicirenden Kreises geht, so ist durch die vorstehenden Ausdrücke für R und k die stereographische Projection des Kreises DE vollständig gegeben.

32.

Die im vor. Art. entwickelten Ausdrücke gelten für jede stereographische Projection, beziehen wir sie jetzt auf die stereographische Polar-

projection. In dieser ist der Punkt B der Figur der eine Pol der Kugel, dessen Projection den Mittelpunkt der genannten Polarprojection bildet, r ist der Halbmesser des Aequators in der Projection, und nennt man die geographische Länge des Poles des zu projicirenden Kreises, wie oben, $\varLambda$, so liegt die Projection des Mittelpunkts desselben auch unter der Länge $\varLambda$. Sei ferner wie oben die Polhöhe des Pols N des zu projicirenden Kreises Φ, so wird $\psi = 90^0 - \Phi$, und man bekommt

$$R = r \frac{\sin H_{,}}{\cos H_{,} + \sin \Phi}$$

$$k = r \frac{\cos \Phi}{\cos H_{,} + \sin \Phi}$$

Es kann sich ereignen, dass man den gegebenen Kreis DE der Kugel, oder wenigstens einen Theil desselben, auf die entgegengesetzte stereographische Polarprojection auftragen muss. In diesem Falle ist nichts weiteres zu thun wie $180^0 - H_{,}$ statt $H_{,}$ in die Ausdrücke für R und k zu setzen, so wie k unter der Länge $180^0 + \varLambda$ statt unter $\varLambda$ selbst aufzutragen.

33.

Ausser dem Vorstehenden ist noch die Untersuchung des Einflusses, den die Fehler der Venus- und Sonnentafeln auf die Bestimmung der Sonnenparallaxe aus einem Venusvorübergange ausüben, von besonderer Wichtigkeit, und diese soll daher hier vorgenommen werden. Nehmen wir, wie gewiss erlaubt ist, hiebei an, dass die Tafelfehler während des Vorüberganges dieselben bleiben, so sind n und N des Art. 9 unveränderlich, und P_0 und Q_0, oder allgemein P und Q die Veränderlichen. Ihrer Seits sind daher auch γ und μ, so wie S und Σ veränderlich. Der Ausdruck für $d\varrho_0$ des Art. 19 giebt, wenn blos die mit dS und $d\Sigma$ multiplicirten Glieder berücksichtigt werden

$$\cos H \cos \theta_0 d\varrho_0 = \frac{1}{m} \cos (N' - \Sigma - \theta)\, dS$$
$$+ \frac{1}{m} \sin (N' - \Sigma - \theta)\, S d\Sigma$$

Die Differentiation der Ausdrücke für P und Q des Art. 9 geben, mit stets ausreichender Genauigkeit

$$dP = mr_{,} \cos b\, (dl - d\lambda')$$
$$dQ = mr_{,} (db - d\beta')$$

in welchen $d\lambda' = d\lambda$ und $d\beta' = -d\beta$ gesetzt werden müssen. Man bekommt ferner

$$d\gamma = \sin N dQ - \cos N dP$$
$$d\mu = -\frac{15}{n}\cos N dQ - \frac{15}{n}\sin N dP$$
$$dS = \sin \Sigma d\gamma - \frac{n}{15}\cos \Sigma d\mu$$
$$S d\Sigma = \cos \Sigma d\gamma + \frac{n}{15}\sin \Sigma d\mu$$

und durch die Gleichungen des Art. 7 bekommt man für die Conjunction

$$dl - d\lambda = \frac{r'}{r_, \cos b}(dl' - d\lambda)$$
$$db + d\beta = \frac{r'}{r_,} d\beta$$

wo dl' den tabularischen Fehler der Sonnenlänge, sowie $d\lambda$ und $d\beta$ die tabularischen Fehler der heliocentrischen Länge und Breite der Venus bezeichnen. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$\cos H \cos \theta_0 d\varrho_0 = r' \sin(N' - N - \theta)(d\lambda - dl')$$
$$+ r' \cos(N' - N - \theta)\, d\beta$$

Die Fehler der geocentrischen Längen und Breiten der Venus kommen also, wie man sieht, hier gar nicht in Betracht; Fehler in den tabularischen Werthen der Radii Vectores haben so geringen Einfluss, dass sie keine Beachtung verdienen, und daher gänzlich übergangen werden können.

34.

Es ist nun vor Allem hier zu erwägen, dass die tabularischen Fehler der Venusörter, abgesehen von anderen Ursachen, die sie haben können, Functionen der Sonnenparallaxe, also Functionen der Unbekannten unserer Aufgabe sind, denn bei der Bearbeitung der Venustafeln hat man die Anwendung eines gewissen Werthes der Sonnenparallaxe nicht umgehen können, und der Fehler, mit welchem dieser Werth behaftet ist, hat sich mehr oder weniger auf die tabularischen Venusörter übertragen. Es ist daher von Wichtigkeit, den tabularischen Fehler dieser Oerter entweder zu eliminiren, oder auf angemessene Art in Function der Sonnenparallaxe zu bestimmen.

Betrachten wir die Bögen N und Σ genauer. In jedem Venusvorübergange ist N ein beständiger Bogen, welcher in der Nähe von 270° liegt, wogegen Σ während des Verlaufes der Erscheinung veränderlich, aber zwischen Werthen eingeschlossen ist, die im Mittel, jenachdem γ positiv oder negativ ist, 90° oder 270° betragen. Die möglichst grosse Abweichung des Werthes von Σ von diesen Mittelwerthen findet bei

den Ein- und Austritten statt, die Mittelwerthe selbst sehr nahe während der grössten Phase.*) In der Regel wird cos $(N'-N-\theta)$ grösser sein, wie sin $(N'-N-\theta)$, und der Fehler in der Venusbreite wird auf das Resultat grösseren Einfluss äussern, wie der in der Venuslänge, aber jener ist auch in den Tafeln von dem etwaigen Fehler der bei der Bearbeitung derselben angewandten Sonnenparallaxe mehr beeinflusst als dieser.

Es geht aus allem diesen hervor, dass für die gleichartige Erscheinung — Eintritt oder Austritt oder Entfernung der Mittelpunkte in gleichem Abstand von der grössten Phase — die rechte Seite der Gleichung des vor. Art. nahe denselben Werth annimmt, es mag diese Erscheinung auf der nördlichen oder der südlichen Halbkugel der Erde beobachtet worden sein. Aber wenn auf dem einen solcher zwei Beobachtungsörter cos θ_0 positiv ist, so ist auf dem anderen Beobachtungsorte cos θ_0 negativ, und hat übrigens nahe denselben Werth. Die Tafelfehler wirken also in entgegengesetztem Sinne auf diese Beobachtungen ein, und das arithmetische Mittel aus den Resultaten derselben wird schon sehr nahe von den Tafelfehlern unabhängig sein. Sollte dieses Mittel den gewünschten Zweck nicht ausreichend erfüllen, so lässt sich immer eine andere Combination der Beobachtungen angeben, wodurch der Zweck erreicht wird; die zweckmässigste wird weiter unten entwickelt werden.

35.

Es kann sich wohl ereignen, dass das im vor. Art. erklärte Verfahren, die Tafelfehler zu eliminiren, aus Mangel an geeigneten Beobachtungen nicht angewandt werden kann. Es ist der Fall nicht unmöglich, dass auf der einen Halbkugel der Erde, wegen localer Hindernisse geeignete Beobachtungen nicht haben erlangt werden können. In diesem Falle kann man aber durch besondere Beobachtungen mit Meridianinstrumenten den Tafelfehler bestimmen, und in Function der Sonnenparallaxe darstellen. Man würde zu dem Ende vor und nach der Conjunction, in welcher ein Venusvorübergang eintritt, die Venusörter im Meridian beobachten, und die Resultate dieser Beobachtungen mit denen der Venustafeln vergleichen müssen.

---

*) Im Venusdurchgange des Jahres 1874 ist die grösste Abweichung vom Mittelwerthe ohngefähr 31°.

Seien A und D eine im Meridian beobachtete grade Aufsteigung und Abweichung der Venus, dann ist zwar A auch die geocentrische grade Aufsteigung, aber die geocentrische Abweichung ist

$$D \pm \frac{\varrho_0}{r_{,}} \cos H_0$$

wenn H_0 die Meridianhöhe der Venus bezeichnet. Das obere Zeichen muss angewandt werden, wenn die Venus südlich, und das untere Zeichen, wenn sie nördlich vom Zenith des Beobachtungsortes culminirt. Aus A und D rechne man auf gewöhnliche Art Länge und Breite, und nenne diese L und B, dann wird die geocentrische Länge =

$$L \pm \frac{\varrho_0}{r_{,}} \cos H_0 \frac{\sin h_0}{\cos b_0}$$

und die geocentrische Breite =

$$B \pm \frac{\varrho_0}{r_{,}} \cos H_0 \cos h_0$$

wo h_0 der im Zeitpunkt der Beobachtung statt findende Winkel zwischen dem Breiten- und dem Abweichungskreise ist. Aus L und B rechne man die heliocentrische Länge und Breite, die mit (λ) und (β) bezeichnet werden sollen, dann wird der Tafelfehler, in soweit er aus dieser Beobachtung folgt, in heliocentrischer Länge =

$$(\lambda) - \lambda_0 \pm \frac{\varrho_0}{r} \cos H_0 \frac{\sin h_0}{\cos \beta_0} \cos (l_0 - \lambda_0)$$

und in heliocentrischer Breite =

$$(\beta) - \beta_0 \pm \frac{\varrho_0}{r} \left\{ \cos H_0 \cos h_0 \frac{\cos \beta_0}{\cos b_0} + \cos H_0 \sin h_0 \sin \beta_0 \sin (l_0 - \lambda_0) \right\}$$

Hat man nun eine Anzahl solcher Beobachtungen erhalten, und aus jeder derselben die vorstehenden Functionen berechnet, in welchen mit Ausnahme von ϱ_0, die den Grössen angehängte Null andeutet, dass sie die gleichzeitigen Werthe sein sollen, so muss man, in der Annahme, dass der Tafelfehler während derselben sich nicht ändert, aus allen das arithmetische Mittel nehmen. Sei (L) das Mittel aus den $(\lambda) - \lambda_0$, a das Mittel aus den Werthen des zu $(\lambda) - \lambda_0$ gehörigen Coefficienten von ϱ_0, (B) das Mittel aus den Werthen von $(\beta) - \beta_0$, und b das Mittel aus den dazu gehörigen Coefficienten von ϱ_0, dann wird der Tafelfehler, wenn er wie vorher mit $d\lambda$ und $d\beta$ bezeichnet wird,

$$d\lambda = (L) \pm \varrho_0 a\,, \quad d\beta = (B) \pm \varrho_0 b$$

und man bekommt durch die Gleichung des Art. 33

$$d\varrho_0 = U \pm \varrho_0 U'$$

wenn zur Abkürzung

$$U = \frac{(L)\, r' \sin(N' - N - \theta) + (B)\, r' \cos(N' - N - \theta)}{\cos H \cos \theta_0}$$

$$U' = \frac{a\, r' \sin(N' - N - \theta) + (B)\, r' \cos(N' - N - \theta)}{\cos H \cos \theta_0}$$

gesetzt wird. Man habe nun, ohne auf die Tafelfehler Rücksicht zu nehmen, durch eine der Gleichungen des Art. 15 für irgend welche Beobachtung den Werth von ϱ_0 berechnet, und diesen $= (\varrho_0)$ gefunden, dann wird der berichtigte Werth

$$\varrho_0 = (\varrho_0) + d\varrho_0$$

also in Folge des vorstehenden Ausdrucks

$$\varrho_0 = \frac{(\varrho_0) + U}{1 \mp U'}$$

Wenn nun in den Meridianbeobachtungen, die dem Vorhergehenden zufolge, gedient haben sollen, um U und U' zu erhalten, die Venus in der Nähe des Zeniths culminirt hat, so wird U' sehr klein, und es kann wenig verschlagen, ob U' positiv oder negativ ist. Wenn aber bei den genannten Beobachtungen die Venus beträchtlich weit vom Zenith culminirt hat, so kommt es zur sicheren Bestimmung von ϱ_0 wesentlich auf das Zeichen von U' an; dann muss dieses so beschaffen sein, dass der Divisor des vorstehenden Ausdrucks grösser wie 1 wird. Aus den vorstehenden Erklärungen findet man leicht, dass diese Bedingung immer erfüllt wird, wenn die Beobachtungsörter des Venusvorüberganges und der Bestimmung der Tafelfehler auf den entgegengesetzten Halbkugeln der Erde liegen. Im gegentheiligen Falle wird der Divisor kleiner wie 1, und kann sogar Null werden.

Die Tafelfehler der Sonnenlänge müssen bei Anwendung des eben beschriebenen Verfahrens für sich bestimmt werden, es ist aber hiebei nichts zu bemerken, da diese durch Meridianbeobachtungen unabhängig von der Sonnenparallaxe gefunden werden.

Es wäre noch die Einwirkung von Fehlern in den Halbmessern der Venus und der Sonne zu untersuchen, diese soll mit dem Inhalt der folgenden Artt. verbunden werden.

36.

Bis jetzt habe ich die Bestimmung der Sonnenparallaxe aus einem Venusdurchgange so aufgefasst, dass man aus jeder Beobachtung durch die Gleichungen des Art. 15 die aus derselben folgende Sonnenparallaxe bestimme, und auf die eine oder andere der beiden erklärten Verfahrungsarten von dem Einflusse der Tafelfehler befreie. Alle so erhaltenen

Werthe der Sonnenparallaxe sind hierauf nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung so mit einander zu combiniren, dass schliesslich der wahrscheinlichste Werth der Sonnenparallaxe daraus hervorgeht, und die Angabe dieser Combination unterliegt keiner Schwierigkeit.

Aber man kann die Aufgabe aus einem andern Gesichtspunkt betrachten, und sie ist auch von den Berechnern der Venusvorübergänge des vorigen Jahrhunderts von einem andern Gesichtspunkt betrachtet worden. Man kann einen genäherten, vorläufigen Werth der Sonnenparallaxe in die Formeln substituiren, die Unterschiede berechnen, die die Beobachtungen darauf ergeben, die Differentialgleichungen zwischen diesen Unterschieden und den Verbesserungen der der Rechnung zu Grunde gelegten Elemente aufstellen, und aus der Auflösung der Gesammtheit dieser Gleichungen mit Zuziehung der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Verbesserungen aller dieser Elemente bestimmen. Hiebei braucht die Abhängigkeit der Tafelfehler von der Sonnenparallaxe nicht besonders berücksichtigt zu werden.

Für die Venusdurchgänge des vorigen Jahrhunderts, wo nur Ein- und Austritte beobachtet, oder wenigstens nur diese in Rechnung gezogen worden sind, hat man mit einer vorläufigen Sonnenparallaxe die Ein- und Austrittszeiten berechnet, mit den beobachteten verglichen, darauf die betreffenden Differentialgleichungen aufgestellt, und durch die Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst. Bei beobachteten Ränderentfernungen lässt sich dasselbe Verfahren anwenden, aber es ist in jedem Falle weitläuftig, da die Gleichungen, aus welchen die Ein- und Austrittszeiten, oder die einer gegebenen Ränderentfernung berechnet werden müssen, transcendent sind, wenn man nicht zu mislichen Weglassungen greifen will. Die genauen Gleichungen für diese Berechnung enthalten sowohl die Zeit t selbst wie $\sin t$ und $\cos t$, und können daher nur indirect, oder durch successive Näherungen aufgelöst werden, auch werden die Coefficienten der unbekannten Verbesserungen der Elemente der Rechnung, wenn man sie genau haben will, weitläuftig.

Weit einfacher, und in jeder Beziehung direct und strenge, wird die Rechnung, wenn man einen entgegengesetzten Weg einschlägt, und aus den beobachteten Zeiten nebst einem vorläufigen Werthe der Sonnenparallaxe den Halbmesser u des Schattenkegels in der durch den Beobachtungsort gelegten Ebene berechnet, diesen bei beobachteten Ränderberührungen mit dem theoretischen, und bei beobachteten Rän-



derentfernungen mit dem beobachteten Werthe desselben vergleicht, darauf die entsprechenden Differentialgleichungen aufstellt, und durch die Methode der kleinsten Quadrate auflöst.

37.

Zur Ausführung des eben angedeuteten Verfahrens kann man den aus den Beobachtungszeiten zu berechnenden Werth von u, den ich, um ihn von dem andern oben genannten Werthe zu unterscheiden, mit u_0 bezeichnen werde, aus der quadratischen Gleichung des Art. 15 berechnen, nachdem man sie in Bezug auf u umgestellt hat. Einfacher ist es indess, dafür dieselben Gleichungen des Art. 15 anzuwenden, die zu den vorhergehenden Untersuchungen gedient haben, aber jetzt nicht abgekürzt werden dürfen. Setzt man

$$J = \theta - L$$

so werden diese Gleichungen

$$u_0 \sin J = S \sin(W' - \Sigma)$$
$$u_0 \cos J = S \cos(W' - \Sigma) - m\varrho_0 l \cos H$$

und geben nicht blos u_0, sondern auch den Winkel J, welcher weiter unten in den Differentialquotienten wieder erscheinen, und zur Berechnung dieser gebraucht werden wird.

Um u_0 und J aus den vorstehenden Gleichungen berechnen zu können, muss zuerst die Kenntniss von l, L und H erlangt werden, und diese bekommt man auf die folgende Weise. Man rechne die Hülfswinkel p und q aus den folgenden Gleichungen

$$\cos p \sin q = \cos\varphi, \cos(t + \Delta\alpha')$$
$$\cos p \cos q = \sin\varphi,$$
$$\sin p \quad = \cos\varphi, \sin(t + \Delta\alpha')$$

durch welche q immer so zu bestimmen ist, dass $\cos p$ positiv wird, dann erhält man

$$(l \cos H) \sin L = \sin p$$
$$(l \cos H) \cos L = d \cos p \cos(q + D)$$
$$\sin H \quad = \cos p \sin(q + D)$$

Die Functionen L, $(l \cos H)$, $\sin H$ sind die einzigen die statt K und H hier gebraucht werden. Hat man jene berechnet, so erhält man

$$W' = N' - L$$

und ferner

$$S \sin\Sigma = \gamma$$
$$S \cos\Sigma = (t - \lambda - \mu)\,\frac{n}{15}$$

womit alle Grössen gegeben sind, die zur Berechnung von u_0 und J aus den obigen Gleichungen gebraucht werden, indem für ϱ_0 ein beliebiger, genäherter Werth zu substituiren ist.

Da hier t die beobachtete wahre Zeit des Beobachtungsortes bezeichnet, so hat man, wenn die Beobachtung nach mittlerer oder Sternzeit angestellt und niedergeschrieben worden ist, diese vor der Substitution in die obigen Ausdrücke in wahre Sonnenzeit zu verwandeln.

Betrachten wir nun den Fall der beobachteten Ränderentfernung, dann ist der daraus folgende Werth des zweiten Ausdrucks für u des Art. 17 dem obigen Werthe von u_0 gegenüber zu stellen, nemlich

$$\pm u = (u) - \{r'r_{,} - (r' + r_{,})\, \varrho_0 \sin H\} \frac{m}{r} \operatorname{tg} b'$$

in welchem den Artt. 4 und 15 zufolge

$$(u) = u' - m\varrho_0 \sin f \sin H$$

und

$$u' = m \frac{r_{,}}{r} \sin \varDelta' \pm m \frac{r'}{r} \sin \varDelta$$

$$\sin f = \frac{1}{mr_{,}} \{u' \mp m \sin \varDelta\} = \frac{\sin \varDelta' \pm \sin \varDelta}{r}$$

sind.*) In Bezug auf die Anwendung der oberen oder der unteren Zeichen dieser Ausdrücke beziehe ich mich hier auf die in den Artt. 4 und 17 gegebenen Erklärungen.

38.

Der Unterschied zwischen u_0 und u, welcher sich ergeben wird, ist nun Folge, theils der Beobachtungsfehler, theils der Fehler der zur Berechnung dieser beiden Grössen angewandten Elemente, und bezeichnet man den Inbegriff der Fehler der letzteren mit du_0 und du, so dass die wahren Werthe $u_0 + du_0$ und $u + du$ werden, so muss, wenn keine Beobachtungsfehler vorhanden sind, die Bedingungsgleichung

$$u_0 + du_0 = u + du$$

statt finden. Dieselbe Gleichung muss aber auch bei vorhandenen Beobachtungsfehlern für jede vorhandene Beobachtung aufgestellt werden, und da der Gesammtheit dieser Bedingungsgleichungen, eben der Beobachtungsfehler wegen, nicht vollständig Gnüge geleistet werden kann, so müssen, den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zufolge, die

*) $\sin f$ und $\operatorname{tg} f$, so wie $\sin b'$ und $\operatorname{tg} b'$ sind hier wegen der Kleinheit der Bögen gleichbedeutend.

wahrscheinlichsten Werthe der Fehler der Elemente derselben durch die Methode der kleinsten Quadrate ermittelt werden.

39.

Es sind nun zuerst, um die oben ausgesprochene Bedingung erfüllen zu können, die Differentiale du_0 und du in Bezug auf die in ihnen enthaltenen Elemente zu entwickeln, und diese letzteren sind: die Sonnenparallaxe selbst, der Unterschied zwischen der Sonnenlänge und der heliocentrischen Venuslänge, die heliocentrische Venusbreite, und die Halbmesser der Sonne und der Venus, welchen man noch die Länge des Beobachtungsortes hinzufügen kann, obgleich diese bei der Auflösung der Gleichungen weggelassen werden muss.

Ich bemerke, dass im Vorhergehenden die heliocentrische Länge der Venus und die geographische Länge des Beobachtungsortes mit demselben Zeichen λ bezeichnet worden sind. Hier wo diese beiden Grössen neben einander vorkommen, muss eine verschiedene Bezeichnung eingeführt werden, und es wird daher im Folgenden die geographische Länge des Beobachtungsortes mit λ_0 bezeichnet werden, während nach wie vor λ die heliocentrische Länge der Venus bedeuten wird.

Die Differentiation der Gleichungen für u_0 und J des Art. 37 giebt zuerst, wenn gar keine Grössen übergangen werden,

$$\begin{aligned} du_0 = & - ml \cos H d\varrho_0 \\ & + \cos(W' - \Sigma - J)\, dS \\ & + \sin(W' - \Sigma - J)\, S d\Sigma \end{aligned}$$

und aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} S \sin \Sigma &= \gamma \\ S \cos \Sigma &= \tfrac{n}{15}(t - \lambda_0 - \mu) \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} dS &= \sin \Sigma d\gamma - \tfrac{n}{15} \cos \Sigma (d\lambda_0 + d\mu) \\ S d\Sigma &= \cos \Sigma d\gamma + \tfrac{n}{15} \sin \Sigma (d\lambda_0 + d\mu) \end{aligned}$$

die durch Hülfe der Relationen des Art. 33, und der Bemerkung über die Einheit von $d\lambda_0$ des Art. 20 in die folgenden übergehen,

$$\begin{aligned} dS = & - mr' \sin(N - \Sigma)(d\lambda - dl') + mr' \cos(N - \Sigma)\, d\beta \\ & - \tfrac{nR}{3600} \cos \Sigma d\lambda_0 \\ S d\Sigma = & \;\; mr' \cos(N - \Sigma)(d\lambda - dl') + mr' \sin(N - \Sigma)\, d\beta \\ & + \tfrac{nR}{3600} \sin \Sigma d\lambda_0 \end{aligned}$$

wo $R = 206265''$, und die Einheit von $d\lambda_0$ das 15fache der Einheit der anderen Differentiale ist.

Die Gleichung für u des vorvor. Art. giebt

$$\pm\, du = m\left(\frac{r_{,}}{r} - \frac{\varrho_0}{r}\sin H\right)(d\varDelta' \pm d\varDelta_{,})$$
$$- m\left(\sin f - \frac{r'+r_{,}}{r}\operatorname{tg} b'\right)\sin H d\varrho_0$$

wo

$$d\varDelta_{,} = \frac{r'}{r_{,}}\left(1 + \frac{\varrho_0 r}{r' r_{,}}\sin H\right) d\varDelta$$

ist, und diese sind die Ausdrücke, die für du_0 und du in die Bedingungsgleichung

$$u_0 - u + du_0 - du = 0$$

zu substituiren sind.

40.

Den Unterschied $u_0 - u$ geben die obigen Ausdrücke für u_0 und u in Theilen des Kreishalbmessers, und die unmittelbare Substitution der im vor. Art. erhaltenen Ausdrücke für du_0 und du würde daher zur Folge haben, dass man auch $d\varrho_0$, $(dl' - d\lambda)$, $d\beta$, $Sd\lambda_0$, $d\varDelta'$, $d\varDelta_{,}$, in Theilen des Kreishalbmessers ausgedrückt erhalten würde. Da es aber angemessen ist diese Verbesserungen in Bogensecunden auszudrücken, so muss bei der Substitution der Unterschied $u_0 - u$ mit $R = 206265''$ multiplicirt werden. Unterscheiden wir, um in der Anwendung der doppelten Zeichen keine Undeutlichkeit zu veranlassen, die beiden Fälle, in welchen die Entfernungen der beiden Venusränder, entweder vom nächsten oder vom entferntesten Sonnenrande gemessen worden sind, dann erhalten wir aus dem Vorhergehenden:

Im ersten Falle.

$$0 = \frac{R}{m}(u_0 - u) - \left\{l\cos H\cos J - \left(\sin f - \frac{r'+r_{,}}{r}\operatorname{tg} b'\right)\sin H\right\} d\varrho_0$$
$$+ r'\sin(W' - N - J)(d\lambda - dl')$$
$$+ r'\cos(W' - N - J)\, d\beta$$
$$- U\cos(W' - J)\, d\lambda_0$$
$$- \left(\frac{r_{,}}{r} - \frac{\varrho_0}{r}\sin H\right)(d\varDelta' \pm d\varDelta_{,})$$

wo zur Abkürzung

$$U = \frac{206265\, n}{3600\, m}$$

gesetzt worden, und J der im Art. 37 eingeführte Hülfswinkel ist.

Im zweiten Falle.

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{R}{m}(u_0 - u) &- \left\{ l \cos H \cos J + \left(\sin f - \frac{r' + r_{\prime}}{r} \operatorname{tg} b'\right) \sin H \right\} d\varrho_0 \\
&+ r' \sin(W' - N - J)\,(d\lambda - dl') \\
&+ r' \cos(W' - N - J)\, d\beta \\
&- U \sin(W' - J)\, d\lambda_0 \\
&+ \left(\frac{r'}{r_{\prime}} - \frac{\varrho_0}{r} \sin H\right)(d\Delta' \pm d\Delta_{\prime\prime})
\end{aligned}
$$

In beiden Ausdrücken ist das obere Zeichen anzuwenden, wenn die Entfernung des entferntesten, und das untere Zeichen, wenn die Entfernung des nächsten Venusrandes bez. vom nächsten oder vom entferntesten Sonnenrande gemessen worden ist. Dieselben Regeln beziehen sich auch auf das im Ausdrucke von $\sin f$ vorkommende doppelte Zeichen.

41.

Da für beobachtete Ein- oder Austritte der Ausdruck für u etwas anders wird, so halte ich für dienlich auch für diese Fälle die Bedingungsgleichung besonders aufzustellen. Da für Ein- und Austritte

$$u = u' - m\varrho_0 \sin f \sin H$$

wird, wo u' und $\sin f$ dieselben Ausdrücke haben wie vorher, so bekommen wir jetzt

$$
\begin{aligned}
du = m\left(\frac{r_{\prime}}{r} - \frac{\varrho_0}{r} \sin H\right)(d\Delta' \pm d\Delta_{\prime}) \\
- m \sin f \sin H d\varrho_0
\end{aligned}
$$

womit sich ergiebt

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{R}{m}(u_0 - u) &- \{ l \cos H \cos J - \sin f \sin H \} d\varrho_0 \\
&+ r' \sin(W' - N - J)\,(d\lambda - dl') \\
&+ r' \cos(W' - N - J)\, d\beta \\
&- U \sin(W' - J)\, d\lambda_0 \\
&+ \left(\frac{r_{\prime}}{r} - \frac{\varrho_0}{r} \sin H\right)(d\Delta' \pm d\Delta_{\prime})
\end{aligned}
$$

und das obere Zeichen für äussere, hingegen das untere Zeichen für innere Berührungen anzuwenden ist, welche Regeln sich auch auf das in $\sin f$ enthaltene doppelte Zeichen erstrecken.

42.

Es sind zu den im Art. 40 enthaltenen Bedingungsgleichungen noch einige Bemerkungen zu machen, da gemessene Ränderentfernungen auf

verschiedene Weise behandelt werden können. Will man jede gemessene Ränderentfernung für sich behandeln, so ist zwar diesen Bedingungsgleichungen nichts hinzuzufügen, aber anders verhält es sich, wenn man verschiedene solcher Messungen mit einander vereinigen kann.

Ich nehme an, dass man zuerst die Entfernung der nächsten Ränder der Venus und der Sonne, und gleich darauf die Entfernung des entgegengesetzten Venusrandes von demselben Sonnenrande gemessen habe. Wegen der kurzen Zwischenzeit zwischen diesen beiden Messungen ist man berechtigt das arithmetische Mittel daraus zu nehmen, und als eine einzige Beobachtung anzusehen, die für das arithmetische Mittel aus den beiden Beobachtungszeiten gilt. Seien die beiden gemessenen Entfernungen d und d', und

$$b' = \tfrac{1}{2}(d + d')$$

dann ist b' die Entfernung des Mittelpunkts der Venus vom nächsten Sonnenrande, und wenn das Instrument, dessen man sich zu diesen Messungen bedient, zweckmässig eingerichtet ist, so kann man diese beiden Beobachtungen so einrichten, dass im vorstehenden Ausdruck für b' die Collimation desselben von selbst eliminirt ist. Jedenfalls ist in diesem Ausdruck der Venushalbmesser ohne Weiteres verschwunden, und es wird zwar wieder der für u anzuwendende Ausdruck

$$u = (u) - \{r_{,}r' - (r' + r_{,})\,\varrho_0 \sin H\}\,\frac{m}{r}\,\mathrm{tg}\,b'$$

wo wie immer

$$(u) = u' - m\varrho_0 \sin f' \sin H$$

ist, aber es werden jetzt

$$u' = m\,\frac{r_{,}}{r}\,\sin\varDelta'$$

$$\sin f = \frac{u}{mr_{,}} = \frac{\sin\varDelta'}{r}$$

Da hiemit der Venushalbmesser vollständig eliminirt ist, so muss auch in der ersten Gleichung des Art. 40, die immer noch anzuwenden ist,

$$d\varDelta_{,} = 0$$

gesetzt, oder mit anderen Worten das mit $d\varDelta_{,}$ multiplicirte Glied weggelassen werden.

Hat man hingegen die Entfernungen beider Venusränder vom entferntesten Sonnenrande in einer kurzen Zwischenzeit gemessen, so wird für das Mittel aus den beiden Beobachtungszeiten

$$b'' = \tfrac{1}{2}(d'' + d''')$$

zu setzen sein, wenn d'' und d''' diese beiden Entfernungen bezeichnen.

Es ist nun b'' die Entfernung des Venusmittelpunkts vom entferntesten Sonnenrande, und

$$u = -(u) + \{r_{,}r' - (r' + r_{,})\,\varrho_0 \sin H\} \frac{m}{r} \operatorname{tg} b''$$

während (u) denselben Ausdruck hat wie im nächst vorhergehenden Falle. In der zweiten Gleichung des Art. 40, die auch jetzt anzuwenden ist, ist nun b'' statt b' zu substituiren und

$$d\varDelta_{,} = 0$$

zu setzen, oder wieder das mit $d\varDelta_{,}$ multiplicirte Glied wegzulassen.

43.

Wenn man alle vier eben beschriebenen Messungen in so kurzen Zwischenräumen angestellt hat, dass man sie unmittelbar vereinigen, und für das arithmetische Mittel aus allen vier Beobachtungszeiten gelten lassen kann, so setze man

$$b = \tfrac{1}{2}(b'' - b') = \tfrac{1}{4}(d''' + d'' - d' - d)$$

und es wird hierauf b die Entfernung des Mittelpunkts der Venus von dem Mittelpunkt der Sonne sein, welche unabhängig von den beiden Halbmessern gefunden worden ist. Der jetzt für die Berechnung von u anzuwendende Ausdruck ist der erste des Art. 17, nemlich

$$u = \{r'r_{,} - (r' + r_{,})\,\varrho_0 \sin H\} \frac{m}{r} \operatorname{tg} b$$

und da das Differential dieser Gleichung

$$du = -\frac{r' + r_{,}}{r}\, m \sin H \operatorname{tg} b\, d\varrho_0$$

ist, so nehmen die Bedingungsgleichungen die folgende Form an,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{R}{m}(u_0 - u) &- \left\{l \cos H \cos J - \frac{r' + r_{,}}{r} \sin H \operatorname{tg} b\right\} d\varrho_0 \\ &+ r' \sin(W' - N - J)\,(d\lambda - dl') \\ &+ r' \cos(W' - N - J)\, d\beta \\ &- U \cos(W' - J)\, d\lambda_0 \end{aligned}$$

in welcher die Verbesserungen $d\varDelta'$ und $d\varDelta_{,}$ gar nicht vorkommen.

Wenn man meinen sollte, dass die Annahme der Zugehörigkeit der Mittel aus den Messungen und der der Zeiten zu Ungenauigkeiten Anlass geben könnte, so lässt sich, gleichwie für Circummeridianhöhen, eine Verbesserungsformel construiren, durch deren Beihülfe man mehr wie vier einzelne Beobachtungen sicher mit einander zu Einem Resultat im Voraus verbinden kann.

Die Berechnung der Coefficienten von $d\lambda_0$ hat den Nutzen, dass man in jedem Falle den Einfluss eines Fehlers in der Länge des Beobachtungsortes kennen lernt, obgleich diese Glieder bei der Auflösung der Bedingungsgleichungen weggelassen werden müssen. Ich wiederhole, dass in den obigen Ausdrücken die Einheit von $d\lambda_0$ die Zeitsecunde ist.

§ 2. Vorausberechnung des Venusvorüberganges des Jahres 1874.

44.

Da die Conjunctionszeit der Venus und der Sonne, einer vorläufigen Rechnung zufolge im Jahre 1874 nahe Dec. 8. 16h m. Z. Paris eintritt, so berechnete ich aus den Venustafeln von Leverrier und den Sonnentafeln von Oluffsen und mir für die beigesetzten Zeiten die folgenden drei Oerter*)

1874 Dec. 8.

m. Z. Paris	λ	β	log r
14h	76° 48′ 43″65	+ 0° 4′ 28″00	9.8575367
16	76 56 47.46	56.67	9.8575312
18	77 4 51.27	5 25.34	9.8575257
	l'	log r'	m. Z. — w. Z.
14h	256° 52′ 23″86	9.9932894	— 7m 37s30
16	256 57 28.90	9.9932853	35.05
18	257 2 33.94	9.9932812	32.82

und ausserdem

$$b' = -0''41, \quad \varepsilon = 23^\circ\, 27'\, 27''68, \quad \text{Aberr. d.} \odot = 20''58$$

Da diese die ungeänderten tabularischen Oerter sind, so sind die der Venus die wahren im Raume, und die der Sonne die scheinbaren vom Mittelpunkt der Erde aus gesehenen. Aus den vorstehenden heliocentrischen Oertern der Venus ergaben sich die folgenden scheinbaren geocentrischen Oerter derselben,

*) Herr Professor Förster hat auf mein Ersuchen diese Oerter nachrechnen lassen, und erwünschte Uebereinstimmung gefunden.

m. Z. Paris	l	b	log $r_{,}$
14h	257° 3′ 43″.93	+ 0° 12′ 7″.37	9.422151
16	257 0 41.80	13 25.50	9.422148
18	256 57 39.67	14 43.61	9.422149

Die berechnete, und schon hinzugefügte Aberration ist

$$\text{in } l = +\, 3''.30\,, \quad \text{in } b = -\, 1''.41$$

und ferner erhielt ich die folgenden correspondirenden, aphroditocentrischen Oerter der Sonne

m. Z. Paris	λ'	β'
14h	256° 48′ 14″.31	− 0° 4′ 27″.48
16	256 56 18.12	4 56.15
18	257 4 21.93	5 24.82

45.

Unter der Annahme des mittleren Halbmessers

$$\text{der Sonne} = 15'\ 59''.79$$
$$\text{der Venus} = 8.305$$

erhielt ich durch die im Vorhergehenden erklärten Ausdrücke, und indem ich

$$m = 640$$

setzte,

$$u' \begin{cases} = 1.12804\,, \\ = 1.09282\,, \\ = 1.05760\,, \end{cases} \quad \sin f \begin{cases} = 0.0065157 \text{ für äussere Berührung} \\ = 0.0064598 \text{ für den Mittelp. d. Venus} \\ = 0.0064039 \text{ für innere Berührung} \end{cases}$$

ferner

$$\begin{aligned} P_{-1} &= +\, 0.762440 \quad -\, 0.546180 \\ P_0 &= +\, 0.216260 \quad -\, 0.546178 \\ P_1 &= -\, 0.329918 \\ p &= -\, 0.2730895 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{-1} &= +\, 0.815948 \quad +\, 0.087587 \\ Q_0 &= +\, 0.903535 \quad +\, 0.087580 \\ Q_1 &= +\, 0.991115 \\ q &= +\, 0.04379175 \end{aligned}$$

und hieraus

$$N = 279^\circ\ 6'\ 36''.8$$
$$\log n = 9.441818$$
$$\gamma = -0.926379$$
$$\mu = 245^\circ.7185$$

Diese Grössenwerthe sind für den ganzen Verlauf des Vorüberganges unveränderlich.

46.

Es ergeben sich ferner aus den vorstehenden Werthen

m. Z. Paris	α'	δ'	h	a'
14^h^	255° 39′ 15″.5	— 22° 52′ 36″.1	— 5° 39′ 37″.2	255° 44′ 13″.4
16	255 47 54.9	53 52.2	36 15.9	255 49 42.7
18	255 56 35.0	55 7.8	32 54.2	255 55 12.0

und hieraus

m. Z. Paris	$\Delta\alpha'$	D	$\log d$	N'
14^h^	+ 4′ 57″.9	— 22° 56′ 43″.1	9.998770	284° 46′ 14″.0
15	+ 3 22.9	57 21.3		44 33.4
16	+ 1 47.8	57 59.3	9.998770	42 52.7
17	+ 0 12.4	58 37.2		41 11.9
18	— 1 23.0	59 15.1	9.998771	39 31.0

Da diese Grössenwerthe im Verlaufe des Vorüberganges wesentlicher Veränderung unterworfen sind, so habe ich sie für 15^h und 17^h aus den für 14^h, 16^h, 18^h, die direct berechnet worden sind, interpolirt. Bei der Berechnung von D und d aus δ' habe ich die Abplattung der Erde $= 1:300$ angenommen.

Hiemit sind alle Hülfsgrössen gegeben, deren man zur strengen Berechnung der Sonnenparallaxe aus den zu erwartenden Beobachtungen bedarf. Um jedoch im Voraus auch die Grenzcurven möglichst genau berechnen zu können, habe ich noch durch die Gleichungen (27) des Art. 38 der oft angezogenen Abhandlung die folgenden Hülfsgrössen berechnet,

$$\nu = +2'\ 24'', \quad \log e = 9.99885$$
$$\nu' = -2\ 23, \quad \log e' = 9.99992$$

die sich während der ganzen Dauer des Vorüberganges nur unmerklich ändern. Endlich habe ich in der Berechnung der Grenzcurven

$$\varrho_0 = \sin(8''916)$$

angenommen.

47.

Im Art. 31 wurde schon angemerkt, dass um sich ein vollständiges Bild von dem Verhalten eines Venusvorüberganges vor der Sonne auf der Erdoberfläche verschaffen zu können, es dienlich sei, vor Allem die Grenzcurven dieser Erscheinung zu berechnen und aufzuzeichnen. Da im gegenwärtigen Falle der Schattenkegel die Erde ganz einhüllt, so sind die nördliche und die südliche Grenzcurve beide imaginär. Die westliche und die östliche Grenzcurve verwandeln sich in zwei Ovale, die in einander greifen, und sich in zwei Punkten schneiden, von welchen der eine in der Nähe des Nordpols, und der andere in der Nähe des Südpols liegt. Die Curve für die grösste Phase im Horizont zieht sich zwischen den beiden genannten Ovalen hindurch, und schneidet diese in vier Punkten, die in der Nähe der beiden Durchschnittspunkte liegen, die die Grenzcurven mit einander bilden.

Die folgenden Zusammenstellungen geben eine Reihe von Punkten dieser drei Curven, nebst der Zeit des ersten Meridians, dem Stundenwinkel, dem Werthe des Positionswinkels θ_0, und den beiden Hülfswinkeln W und ψ, die zu der Berechnung der Curvenpunkte dienen. Den Punkten der Curve der grössten Phase im Horizont sind überdies die jedesmalige Entfernung b des Mittelpunkts der Venus vom nächsten Sonnenrande beigefügt. Die Punkte aller drei Curven beziehen sich auf den Mittelpunkt der Venus; die Curven, welche sich auf die Venusränder beziehen, würden sich ganz in der Nähe jener erstrecken. Alle Curvenpunkte sind nach den Formeln der oft angezogenen Abhandlung berechnet, und es ist sowohl auf die Abplattung der Erde, wie auf die Strahlenbrechung bei der Berechnung Rücksicht genommen worden. Die Strahlenbrechung im Horizont habe ich $= 34'$ angenommen, sie verschiebt alle Curvenpunkte nahe um diese Grösse.

Erste westlich-östliche Grenzcurve.

$W+\nu$	ψ	τ	t	λ	φ	θ_0
0°	122° 2′	215° 47′	275° 31′	59° 44′	+13° 47′	122° 0′
10	121 34	216 11	271 30	55 19	+ 4 34	131 32
30	120 39	216 49	263 38	46 49	−13 55	151 37
50	119 53	217 0	254 20	37 11	32 3	169 51
70	119 22	217 10	240 22	23 12	49 6	189 20
90	119 12	216 49	213 46	356 57	62 47	209 12
110	119 22	216 9	166 57	310 48	66 15	229 20
130	119 53	215 13	130 7	274 54	56 13	249 51
150	120 39	214 13	111 43	257 30	40 15	270 37
170	121 34	213 13	100 49	247 36	22 29	291 32
180	122 2	212 47	96 31	243 44	13 20	302 0
190	122 30	212 24	92 33	240 9	− 4 7	312 28
210	123 22	211 48	84 43	232 55	+14 23	333 20
230	124 4	211 33	75 31	223 58	32 34	354 2
250	124 31	211 38	61 47	210 9	49 47	14 29
270	124 40	212 0	35 3	183 3	63 44	34 38
290	124 31	212 39	346 22	133 43	67 20	54 29
310	124 4	213 29	308 42	95 13	56 59	74 2
330	123 22	214 24	290 28	76 4	40 49	93 20
350	122 30	215 22	279 43	64 21	+22 58	112 28

Zweite westlich-östliche Grenzcurve.

$W+\nu$	ψ	τ	t	λ	φ	θ_0
0°	57° 58′	278° 40′	275° 9′	356° 29′	+13° 51′	57° 56′
10	58 26	278 13	271 13	353 0	+ 4 36	68 24
30	59 21	277 14	263 24	346 10	−13 54	89 19
50	60 7	276 14	254 7	337 53	32 2	110 5
70	60 38	275 17	240 12	324 55	49 6	130 36
90	60 48	274 38	213 38	299 0	62 49	150 46
110	60 38	274 16	166 44	252 28	66 19	170 36
130	60 7	274 18	129 50	215 32	56 16	190 5
150	59 21	274 38	111 25	196 47	40 18	209 19
170	58 26	275 16	100 31	185 15	22 32	228 24
180	57 58	275 40	96 14	180 34	13 24	237 56
190	57 30	276 5	92 15	176 10	− 4 10	247 28
210	56 38	277 2	84 27	167 25	+14 21	266 36
230	55 56	277 57	75 16	157 19	32 32	285 54
250	55 29	278 47	61 35	142 48	49 46	305 27
270	55 20	279 26	34 55	115 29	63 46	325 18
290	55 29	279 49	346 6	66 17	67 25	345 27
310	55 56	279 53	308 22	28 29	57 4	5 54
330	56 38	279 38	290 7	10 29	40 54	26 36
350	57 30	279 2	279 25	0 23	+23 1	47 28

Curve der grössten Phase im Horizont.

$W+\nu$	ψ	τ	t	λ	φ	θ_0	b
0°	89° 25′	247° 44′	275° 19′	27° 35′	+13° 49′	89° 23′	2′ 28″
10	89 26	247 43	271 23	23 40	+ 4 35	99 24	2 24
30	89 29	247 29	263 32	16 3	−13 55	119 27	2 16
50	89 37	247 2	254 14	7 12	32 3	139 35	2 9
70	89 48	246 25	240 19	353 54	49 7	159 46	2 5
90	90 0	245 43	213 43	328 0	62 48	179 58	2 4
110	90 12	245 1	166 58	281 57	66 17	200 10	2 5
130	90 23	244 25	129 58	245 33	56 13	220 21	2 9
150	90 31	243 58	111 35	227 37	40 17	240 29	2 16
170	90 35	243 44	100 42	216 58	22 31	260 33	2 24
180	90 35	243 42	96 24	212 42	13 22	270 33	2 28
190	90 34	243 44	92 26	208 42	− 4 8	280 32	2 33
210	90 30	243 59	84 36	200 37	+14 22	300 28	2 41
230	90 22	244 26	76 40	190 59	32 34	320 20	2 47
250	90 12	245 2	61 47	176 45	49 48	340 10	2 51
270	90 0	245 43	35 0	149 17	63 46	359 58	2 53
290	89 48	246 24	346 15	99 51	67 22	19 46	2 51
310	89 38	246 59	308 31	61 32	57 0	39 36	2 47
330	89 30	247 27	290 18	42 51	40 52	59 28	2 41
350	89 26	247 42	279 35	31 53	+22 59	79 24	2 33

48.

Auf den beiden dieser Abhandlung beigelegten Planigloben, die nach der stereographischen Polarprojection entworfen sind, wurden zuerst die drei vorbenannten Grenzcurven aufgetragen und ausgezogen, und an ihren Endpunkten auf jedem Planiglob mit Erklärung versehen. Die beiden Curventheile, die die Bezeichnungen »Anfang bei Sonnenuntergang«, und »Ende bei Sonnenaufgang« führen, sind die eigentlichen Grenzcurven, die den Theil der Erdoberfläche, auf welchem die Erscheinung des Venusvorüberganges sichtbar ist, von dem Theil absondert, auf welchem sie unsichtbar ist.

Die Sichtbarkeit dieses Venusvorüberganges umfasst, diesen Grenzcurven gemäss, auf der nördlichen Halbkugel fast ganz Nordafrica, einen Theil von Italien nebst Griechenland und der Türkei, ferner den grössten Theil von Russland, und fast ganz Asien, so wie eine Anzahl von Inseln. Auf der südlichen Halbkugel sieht man diese Erscheinung in fast ganz Südafrica, auf den ostindischen Inseln, Australien, fast allen jetzt bekannten Continenten am Südpol, und fast allen Inseln der Südsee. In ganz Amerika, und in dem grössten Theil von Europa ist dieser Vorübergang unsichtbar.

Nicht auf allen, eben genannten, Theilen der Erdoberfläche sieht man den Vorübergang vollständig, auf den beiden Erdflächen, die einestheils von den oben genannten Grenzcurvenzweigen, und anderntheils von denjenigen eingeschlossen werden, denen die Bezeichnungen »Anfang bei Sonnenaufgang«, und »Ende bei Sonnenuntergang« beigefügt worden sind, sieht man den Vorübergang nur unvollständig; die Sonne geht während desselben entweder auf oder unter. Nur auf der Erdfläche, die von den zuletzt genannten Grenzcurvenzweigen eingeschlossen ist, wird der ganze Vorübergang gesehen.

Zwischen den eben genannten beiden westlich-östlichen Grenzcurven zieht sich die Curve der grössten Phase im Horizont hindurch und durchschneidet jede derselben zwei Mal. Diese Curve sondert also den Theil der Erdoberfläche, auf welchem die grösste Phase sichtbar ist, von demjenigen ab, wo dieses nicht der Fall ist.

Ich habe noch eine vierte Curve berechnet und aufgezeichnet, und zwar die, welche ihre Endpunkte auf der Curve der grössten Phase im Horizont hat, und den Aequator unter ohngefähr 113°—114° der Länge schneidet. Diese ist die Curve der grössten Phase im Mittage oder bez. der Mitternacht; westlich von dieser Curve sieht man den Vorübergang, oder wenigstens den grössten Theil desselben am Vormittage, östlich am Nachmittage.

49.

Auf den beiden westlich-östlichen Grenzcurven liegen die vier Berührungspunkte des Schattenkegels mit der Erde, und zwar zwei auf jeder dieser beiden Curven. Die Punkte, denen sie angehören, und von welchen die Haupthöhencurven ausgehen, kann man, für den Schattenkegel, welcher dem Mittelpunkt der Venus angehört, aus den Verzeichnissen der Curvenpunkte des Art. 47 durch Interpolation finden, da sie den Bedingungen $\theta_0 = 0$, oder $\theta_0 = 180^0$ entsprechen. Ich habe indess vorgezogen diese Punkte, so genau wie möglich, für sich nach den betr. Formeln der oft angezogenen Abhandlung zu berechnen, und zwar nicht blos für den eben genannten Schattenkegel, sondern auch für die beiden Schattenkegel, die den äusseren und inneren Ränderberührungen zukommen. Die Resultate, die ich erhalten habe, sind die folgenden.

1) Erste äussere Berührungen der drei Schattenkegel mit der Erde.
Anfang des Vorüberganges überhaupt.
Eintritt der Venus bei Sonnenuntergang.

$$\theta_0 = 0,$$

m. Z. Paris.

$\tau = 13^h\ 45^m\ 22^s$ äussere Ränderberührung.
$= 13\ \ 58\ \ 32$ Mittelpunkt der Venus.
$= 14\ \ 12\ \ 38$ innere Ränderberührung.

östliche Längen.	Polhöhen.
$\lambda = 225^0\ 29'$	$\varphi = +35^0\ 27'$
$= 220\ \ 44$	$= +37\ \ 39$
$= 215\ \ 28$	$= +40\ \ \ 8$

2) Erste innere Berührungen der drei Schattenkegel mit der Erde.
Eintritt der Venus bei Sonnenaufgang.

$$\theta_0 = 180^0$$

m. Z. Paris.

$\tau = 14^h\ \ 6^m\ 22^s$ äussere Ränderberührung.
$= 14\ \ 21\ \ 16$ Mittelpunkt der Venus.
$= 14\ \ 37\ \ 37$ innere Ränderberührung.

östliche Längen.	Polhöhen.
$\lambda = 36^0\ 33'$	$\varphi = -38^0\ 28'$
$= 30\ \ 49$	$= -41\ \ \ 7$
$= 24\ \ \ 4$	$= -44\ \ 12$

3) Zweite innere Berührung der drei Schattenkegel mit der Erde.
Austritt der Venus bei Sonnenuntergang.

$$\theta_0 = 180^0$$

m. Z. Paris.

$\tau = 17^h\ 53^m\ \ 1^s$ innere Ränderberührung.
$= 18\ \ \ 9\ \ 25$ Mittelpunkt der Venus.
$= 18\ \ 24\ \ 12$ äussere Ränderberührung.

östliche Längen.	Polhöhen.
$\lambda = 243^0\ \ 0'$	$\varphi = -64^0\ 24'$
$= 231\ \ 37$	$= -62\ \ 42$
$= 222\ \ 27$	$= -61\ \ \ 0$

4) Zweite äussere Berührungen der drei Schattenkegel mit der Erde.
Ende des Vorüberganges überhaupt.
Austritt der Venus bei Sonnenaufgang.

$$\theta_0 = 0$$

m. Z. Paris.
$\tau = 18^h\ 17^m\ 57^s$ innere Ränderberührung.
$= 18\ \ 32\ \ \ 3$ Mittelpunkt der Venus.
$= 18\ \ 45\ \ 13$ äussere Ränderberührung.

östliche Längen.	Polhöhen.
$\lambda = 41^\circ\ 26'$	$\varphi = +61^\circ\ 27'$
$= 36\ \ 33$	$= +60\ \ 56$
$= 29\ \ 29$	$= +59\ \ 17$

Die beiden merklichen Punkte der Curve der grössten Phase im Horizont, nemlich das Maximum und das Minimum dieser Phase, welche Punkte den Werthen $\theta_0 = 0$, und $= 180^\circ$ entsprechen, und von welchen die hier zu betrachtenden Haupthöhencurven ausgehen, habe ich aus dem Verzeichniss der Curvenpunkte des Art. 47 entnommen.

50.

Die Haupthöhencurven, die auch auf den beiden anliegenden Planigloben aufgezeichnet worden sind, wurden nach den Ausdrücken der Artt. 24 und 26 berechnet, und die folgenden Punkte derselben erhalten.

Haupthöhencurven für die Eintritte.

H	λ	φ	λ	φ
10°	209° 18′	+31° 57′	43° 18′	−45° 49′
20	200 5	25 55	57 36	48 43
30	191 37	19 25	73 1	49 44
40	183 46	12 33	88 31	48 42
50	176 12	+ 5 31	103 1	45 46
60	168 48	− 1 39	115 48	41 22
70	161 24	8 53	126 57	35 54
80	153 44	16 1	136 49	29 41
90	145 37	−23 0	145 37	−23 0

Haupthöhencurven für die Austritte.

H	λ	φ	λ	φ
10°	47° 57′	+51° 58′	215° 32′	−70° 46′
20	54 57	43 7	184 45	75 41
30	60 19	33 57	144 52	74 42
40	64 44	24 37	119 6	68 35
50	68 41	15 10	105 26	60 21
60	72 19	+ 5 40	97 10	51 23
70	75 45	− 3 54	91 24	42 4
80	79 15	13 29	86 48	32 35
90	82 53	−23 3	82 53	−23 3

Haupthöhencurven für die grösste Phase.

H	λ	φ	λ	φ
10°	139° 18′	+54° 9′	343° 49′	−70° 59′
20	133 38	44 50	14 36	76 9
30	129 33	35 18	55 36	75 16
40	126 20	25 40	81 40	69 5
50	123 37	15 57	94 54	60 46
60	121 11	+ 6 13	102 25	51 43
70	118 51	− 3 33	107 22	42 18
80	116 29	13 18	111 1	32 43
90	113 57	−23 2	113 57	−23 2

Die Punkte dieser Curven, die den nebenstehenden Sonnenhöhen H entsprechen, sind auf den Planigloben mit den Zahlen 10, 20, 30, etc. bezeichnet, und von kleinen Kreisen umschlossen.

51.

Endlich enthalten die Planigloben auch die isosthenischen Kreisbögen für die Haupthöhen $H_{,}$ von 10 zu 10 Graden. Um diese auftragen zu können, wurden sowohl deren Pole oder Mittelpunkte auf der Kugeloberfläche, wie ihre Halbmesser, und die Entfernung ihrer Mittelpunkte vom Mittelpunkt der Projection nach den Ausdrücken der Artt. 29, 30 31 berechnet. Es ist hiebei zu bemerken, dass in dem bei der Anfertigung der Planigloben angewandten Maassstabe der Halbmesser des Aequators oder

$$r = 201.4$$

ist. Man kann die angegebenen Maasse von R und k hiemit auf jede andere Maasseinheit hinführen.

Halbmesser und Mittelpunkte der isosthenischen Kreisbögen für die Eintritte.

a) Auf der nördlichen Halbkugel und dem Planiglob.

$H_{,}$	A	Φ	R	k
10°	219° 35′	+37° 12′	22.0	101.0
20	219 25	37 17	44.6	103.7
30	219 5	37 26	68.3	108.5
40	218 43	37 36	94.1	115.9
50	218 13	37 50	122.8	126.6
60	217 38	38 6	156.1	141.9
70	216 59	38 24	196.5	163.9
80	216 17	38 44	248.1	196.5
90	215 32	39 5	319.5	247.9
80	214 46	39 25	429.9	337.2
70	214 1	+39 46	635.5	519.9

b) Auf der südlichen Halbkugel und dem Planiglob.

$H_{,}$	A	Φ	R	k
10°	31° 2′	−41° 9′	21.3	92.3
20	31 16	41 3	43.1	95.1
30	31 35	40 54	66.2	100.1
40	32 6	40 40	91.3	107.7
50	32 39	40 25	119.5	118.7
60	33 19	40 6	152.5	134.6
70	34 1	39 46	192.7	157.6
80	34 46	39 25	245.2	192.4
90	35 32	39 5	319.5	247.9
80	36 17	38 44	438.8	347.5
70	36 59	38 24	678.0	565.5
60	37 38	−38 6	1484.5	1349.7

Halbmesser und Mittelpunkte der isosthenischen Kreisbögen für die Austritte.

a) Auf der nördlichen Halbkugel und dem Planiglob.

$H_{,}$	A	Φ	R	k
10°	37° 52′	+60° 10′	18.9	54.1
20	38 10	60 14	38.1	55.3
30	38 40	60 21	58.0	57.4
40	39 11	60 27	79.1	60.7
50	39 58	60 37	100.0	65.3
60	40 51	60 48	127.0	71.5
70	41 50	61 1	155.5	80.2
80	42 58	61 14	188.8	92.3
90	44 8	61 28	229.2	109.5
80	45 19	61 42	280.7	135.1
70	46 30	+61 55	350.2	175.5

b) Auf der südlichen Halbkugel und dem Planiglob.

$H_{,}$	A	Φ	R	k
10°	231° 20′	−62° 48′	18.7	49.1
20	230 59	62 44	37.7	50.5
30	230 26	62 38	57.4	52.8
40	229 37	62 30	78.3	56.3
50	228 44	62 21	100.9	61.2
60	227 38	62 8	126.0	68.0
70	226 30	61 55	154.5	77.4
80	225 19	61 42	188.1	90.6
90	224 8	61 28	229.2	109.5
80	222 58	61 14	282.2	137.5
70	221 50	−61 1	355.2	183.2

Halbmesser und Mittelpunkte der isosthenischen Kreisbögen für die grösste Phase.

Die gemeinschaftlichen Mittelpunkte oder Pole auf der Kugeloberfläche, die diesen Kreisbögen zukommen, liegen unter

$$\varLambda = 148^0\, 12', \qquad \Phi = +\, 62^0\, 56'$$

und

$$\varLambda = 328^0\, 12', \qquad \Phi = -\, 62^0\, 56'$$

Die Halbmesser und Mittelpunkte sind für die beigesetzten Werthe der Haupthöhen $H_{\prime}$ auf beiden Planigloben die folgenden.

$H_{\prime}$	R	k
10°	18.6	48.9
20	37.6	50.1
30	57.3	52.2
40	78.1	55.3
50	100.6	59.8
60	125.4	65.9
70	153.5	74.3
80	186.4	86.1
90	226.2	102.9
80	276.7	127.8
70	345.1	167.1
60	446.8	234.7

Die Haupthöhen sind auf den Planigloben an den Endpunkten der isosthenischen Kreisbögen angeführt, und die Kreisbögen für $H_{\prime} = 90^0$ mit einer Anzahl schwarzer Scheibchen versehen, um sie von den andern auffällig zu machen. Da auf diesen der Coefficient von $d\varrho_0 = 0$ ist, so ist an den Oertern, die von ihnen getroffen werden, die Bestimmung der Sonnenparallaxe absolut unmöglich.

Auf diesen beiden Planigloben kann man jetzt für jeden Ort den Coefficienten von $d\varrho_0$ für die Eintritte, die grösste Phase und die Austritte gleichsam ablesen, man braucht nur auf die beigesetzten Zahlen, die die entsprechenden Bögen $H_{\prime}$ angeben, zu achten, die Cosinusse dieser Bögen sind bis auf sehr Weniges dem Coefficienten von $d\varrho_0$ gleich. Man kann also ohne Weiteres sich über die Zweckmässigkeit oder Unzweckmässigkeit irgend eines Beobachtungsortes, sei es für die Eintritte, oder für die grösste Phase oder für die Austritte durch Hülfe dieser Planigloben eine sichere Vorstellung machen.*)

*) Die Einzeichnung der Länderumrisse auf diesen Planigloben hat auf meinen Wunsch Herr Professor Dr. Petermann die Güte gehabt ausführen zu lassen, wofür ich hier meinen besten Dank ausspreche.

52.

Es sollen jetzt für den in Rede stehenden Venusvorübergang die numerischen Werthe der Glieder rechter Hand der Differentialgleichung des Art. 20 untersucht werden. Diese Gleichung ist

$$\pm \cos H_{,} d\varrho_0 = \frac{206265\, n}{3600\, m} \cos(N' - \theta)\,(dt - d\lambda)$$
$$\pm \frac{r_{,}r'}{r}\, db'$$

Der Coefficient von $dt - d\lambda$ dieser Gleichung giebt in der vorstehenden Form nicht die geeigneteste Uebersicht über die verschiedenen Werthe, die er im Verlaufe des Vorüberganges annimmt, aber man kann ihm leicht eine Form geben, die diese Uebersicht gewährt. Nehmen wir die im Vorhergehenden oftmals angewandten Gleichungen des Art. 15 vor, die nachdem $l = 1$ gesetzt worden ist, in die folgenden übergehen,

$$u \cos(\theta - K) = S \cos(N' - K - \Sigma) - m\varrho_0 \cos H$$
$$u \sin(\theta - K) = S \sin(N' - K - \Sigma)$$

und aus welchen man leicht

$$u \cos(N' - \theta) = S \cos \Sigma - m\varrho_0 \cos H \cos(N' - K)$$

erhält. Erwägt man nun, dass

$$S \cos \Sigma = \frac{n}{15}(t - \lambda - \mu)$$

ist, übergeht das kleine mit $m\varrho_0$ multiplicirte Glied in Bezug auf das vorhergehende, und setzt $u = 1$, welches hier erlaubt ist, so ergiebt sich

$$\cos(N' - \theta) = \mp \frac{n}{15}(t - \lambda - \mu)$$

und die obige Differentialgleichung wird

$$\pm \cos H_{,} d\varrho_0 = A(t - \lambda - \mu)(dt - d\lambda) \pm \frac{r_{,}r'}{r}\, db'$$

wenn zur Abkürzung

$$A = \frac{206265\, n^2}{54000\, m}$$

gesetzt wird. Beschäftigen wir uns zuerst blos mit dem mit $dt - d\lambda$ multiplicirten Gliede. Für den in Rede stehenden Venusvorübergang findet man

$$\log A = 6.6594 - 10$$

und die Verzeichnisse der Curvenpunkte des Art. 47 zeigen, dass für die Ein- und Austritte des Mittelpunkts der Venus $(t - \lambda - \mu) = \pm 34^0$ werden kann. Für die äusseren Ränderberührungen kann diese Grösse immerhin auf 35^0 oder gar 36^0 gehen, allein wir wollen bei dem vorstehenden Werthe stehen bleiben. Substituirt man diesen, so erhält man

$$\pm \cos H_{,} d\varrho_0 = \pm 0.0155 \; (dt - d\lambda)$$

Die Beobachtungen der Venusvorübergänge des vorigen Jahrhunderts haben aber gezeigt, dass wenigstens damals der mittlere Fehler der Beobachtung eines Ein- oder Austrittes 7^s betrug, nehmen wir in Ermangelung anderer Angaben diesen Betrag wieder an, so ergiebt sich aus dieser Ursache

$$\cos H_{,} d\varrho_0 = \pm 0''109$$

oder mehr wie eine Zehntelsecunde, welcher Fehler noch dadurch vergrössert wird, dass $\cos H_{,}$ in der Wirklichkeit immer kleiner wie Eins ist. Der Fehler in der Länge des Beobachtungsortes kann wohl zuweilen grösser wie 7^s sein, er kann zufällig die eben gefundene Wirkung des Beobachtungsfehlers verkleinern, er kann sie aber auch vergrössern, und wir dürfen daher wohl annehmen, dass die Gesammtwirkung dieser beiden Fehler auf die aus Ein- oder Austritten gefolgerte Sonnenparallaxe im Mittel für jede einzelne Beobachtung grösser wie 0''1 ist.

53.

Gehen wir zu den Distanzmessungen um die Zeit der grössten Phase über, so sehen wir sowohl aus den betreffenden Formeln, wie aus dem obigen Verzeichnisse der Punkte der Curve der grössten Phase im Horizont, und auf den beiden dazu gehörigen Haupthöhencurven, dass $(t - \lambda - \mu)$ sehr nahe $= 0$ ist, und dasselbe findet daher auch auf allen für die Beobachtungen um die Zeit der grössten Phase günstigen Beobachtungsörtern statt. Nehmen wir daher im gegenwärtigen Falle als Maximum $(t - \lambda - \mu) = 0^\circ 5$ an, da hier wohl selten diese Function grössere Werthe annehmen wird, so ergiebt sich

$$\cos H_{,} d\varrho_0 = \pm 0.00023 \; (dt - d\lambda)$$

und es würde also ein Beobachtungs- oder Längenfehler von ohngefähr

$$7^m \, 20^s = 1^\circ \, 50'$$

erforderlich sein, um 0''1 in $d\varrho_0$ hervorzubringen. Ein solcher Fehler kann nie erwartet werden, und es kann daher der Satz aufgestellt werden,

»dass durch Distanzmessungen um die Zeit der grössten Phase, an »übrigens günstig gelegenen Beobachtungsörtern, die Sonnenparallaxe »fast unabhängig von den Fehlern der Länge des Beobachtungsortes »und der Beobachtungszeiten gefunden wird.«

Ich bin geneigt, dieses für einen grossen Vortheil dieser Bestimmungsart zu halten.

Man kann diesen Satz weiter ausdehnen. Da der Coefficient $(t-\lambda-\mu)$ der Zeit proportional, und während der grössten Phase fast Null ist, so muss er für Beobachtungen in gleichen Zeitintervallen vor und nach der grössten Phase nahe denselben Werth bekommen, aber für die erste von je zweien solcher Beobachtungen negativ, und für die zweite positiv sein. Da ferner gleichartige Ein- und Austritte in nahe gleichen Zeitintervallen von der grössten Phase erfolgen, so muss für diese derselbe Fall eintreten. Da endlich in der grössten Phase auch der Coefficient des Fehlers der Beobachtungszeit sein Zeichen wechselt, wie aus den Gleichungen des Art. 20 hervorgeht, so bekommen wir den folgenden

Satz.

»Die Verweilungen der Venus vor der Sonnenscheibe sind, wenig- »stens an den günstigen Beobachtungsörtern, von der Länge des »Beobachtungsortes, und folglich auch von dem Fehler derselben fast »unabhängig.«

Man darf indess hieraus nicht schliessen, dass es unbedingt vortheilhaft ist, statt der Ein- und Austritte selbst ihre Unterschiede, die Verweilungen, der Rechnung zu unterwerfen. Durch dieses Verfahren würde man das Resultat in Bezug auf die Sonnenparallaxe abschwächen, indem die Beobachtung einer Verweilung nur das halbe Gewicht der Beobachtung eines Ein- oder Austrittes hat, und der Coefficient der Sonnenparallaxe in der der Verweilung entsprechenden Bedingungsgleichung nicht auf das Doppelte, wie es unter diesen Umständen sein sollte, wächst. Gemeiniglich hat dieser Coefficient nur entweder für den Eintritt, oder nur für den Austritt eine angemessene, oder günstige Grösse, und kann daher in der Addition der beiden Bedingungsgleichungen für Ein- und Austritt nicht das Doppelte des günstigen Coefficienten erreichen. Es bleibt daher, ungeachtet des obigen Satzes, das Vortheilhafteste, Ein- und Austritte für sich der Rechnung zu unterwerfen.



54.

Gehen wir zu dem mit db' multiplicirten Gliede der Differentialgleichung des vorvorigen Art. über, so finden wir für den in Rede stehenden Venusvorübergang

$$\cos H_{,} d\varrho_0 = \pm 0.361\, db'$$

also 1″ Fehler in der gemessenen einzelnen Entfernung, würde wenigstens 0″.36 Fehler in der Sonnenparallaxe geben. Aber da man so kleine Winkel, wie die, welche hier zu messen sind, mit Anwendung von zweckmässigen Mikrometern, zumal wenn die Beobachtungen so oft, wie im gegenwärtigen Falle möglich ist, wiederholt werden, weit genauer wie auf Eine Secunde messen kann, so wird der aus den Distanzmessungen auf einer Station hervorgehende mittlere Fehler um so mehr kleiner angenommen werden müssen, und es darf erwartet werden, dass er in seiner Wirkung auf die Sonnenparallaxe 0″.1 nicht erreichen wird.

Um die Verkleinerung des Fehlers durch Wiederholung der Messungen noch mehr hervor zu heben, mache ich darauf aufmerksam, dass zufolge des Art. 43 die gemessene Entfernung b der Mittelpunkte der Venus und der Sonne aus den vier einzelnen gemessenen Ränderentfernungen d, d', d'', d''' durch den Ausdruck

$$b = \tfrac{1}{4}(d''' - d'' - d' - d)$$

gefunden wird. Nehmen wir aber den mittleren Fehler Einer Beobachtung einer Ränderberührung zur Einheit an, so ist der mittlere Fehler einer Bestimmung von b aus vier einzelnen Beobachtungen der Ränderberührungen $= \frac{1}{2}$, und drücken wir dieses in der obigen Formel aus, so bekommen wir schon

$$\cos H_{,} d\varrho_0 = \pm 0.181\, db$$

Setzt man den mittleren Fehler Einer Beobachtung einer Ränderberührung $= 0''.5$, welche Annahme wohl eher zu gross als zu klein ist, so wird aus Einer beobachteten Mittelpunktsentfernung schon

$$\cos H_{,} d\varrho_0 = \pm 0''.090$$

erhalten, und die Wiederholungen der Messungen der Mittelpunktsentfernungen müssen nothwendiger Weise diesen mittleren Fehler noch bedeutend verkleinern.

55.

Wirft man nach diesen Auseinandersetzungen wieder einen Blick auf die beiden Planigloben, so wird man finden, dass günstige Beobachtungen in der Nähe der grössten Phase auf der südlichen Halbkugel der Erde, während des Venusvorüberganges des Jahres 1874 wohl in den Bereich der Unmöglichkeit fallen werden. Denn die südliche Haupthöhencurve der grössten Phase, und die dazu gehörigen isosthenischen Kreisbögen, liegen in ihren günstigen Theilen theils in dem antarktischen Eismeere, theils auf den noch zweifelhaften oder ganz unbekannten Continenten am Südpole, die, wenn sie auch inzwischen constatirt werden sollten, wohl so unwirthlich sein werden, dass keine Rechnung auf sie gemacht werden kann.

Dahingegen bietet die nördliche Halbkugel für Beobachtungen um die Zeit der grössten Phase ein weites Feld dar, welches in Sibirien, ohngefähr bei Tomsk anfangend, sich bis zum Okhotschen Meere erstreckt, und das Amurgebiet, die Küsten der Mandschurei, die Japanesischen und einen Theil der Kurilischen Inseln, die Halbinsel Korea, sowie einen Theil von China in sich fasst. Hier, meine ich, ist die vortheilhafteste Ausbeutung der zunächst bevorstehenden Erscheinung des Venusvorüberganges zu erwarten.

56.

Um auch den Verlauf des nächsten Venusvorüberganges an einigen gegebenen Oertern kennen zu lernen, habe ich nach den Ausdrücken des § 8 der oft angezogenen Abhandlung diesen zunächst für vier Oerter, von welchen zwei auf der nördlichen Halbkugel in der Nähe der Haupthöhencurve für die grösste Phase, und zwei auf der südlichen Halbkugel in der Nähe der Haupthöhencurven für die Ein- und Austritte liegen, berechnet, und die folgenden Resultate erhalten.

Nertschinsk.

$\varphi = 51^{\circ}\,28'\,26''$, $\lambda = 114^{\circ}\,14'\,44''$

		w. Z. d. Beobachtungsortes			
Erste äussere Ränderberührung	Dec. 8.	21^h	37^m	8^s	
Erste innere » »		22	3	50	
Grösste Phase	Dec. 9.	0	2	4	$b' = 2'\,55''$
Zweite innere Ränderberührung		2	0	10	
Zweite äussere » »		2	26	48	

mit den Positionswinkeln

$$\begin{array}{llll} \theta = & 51^{\circ}\, 28', & \theta_0 = & 73^{\circ}\;\; 8' \\ \;\;\, = & 46\;\;\; 4 & \;\;\;\, = & 64\;\;\; 5 \\ \;\;\, = & 14\;\; 29 & \;\;\;\, = & 14\;\;\; 9 \\ \;\;\, = & 342\;\; 55 & \;\;\;\, = & 324\;\; 21 \\ \;\;\, = & 337\;\; 31 & \;\;\;\, = & 315\;\; 19 \end{array}$$

Man sieht, dass hier in der grössten Phase der Positionswinkel θ_0 den Werth 0 noch nicht erreicht hat, wie auch aus dem Planiglob hervorgeht, da Nertschinsk beträchtlich westlich von der Haupthöhencurve liegt. Man kann sehr günstige Beobachtungen erhalten, wenn man die Distanzmessungen bei ohngefähr $\theta_0 = 25^{\circ}$, und vielleicht noch grösserem Werthe, anfängt, und fortsetzt bis θ_0 auf der anderen Seite des Verticalkreises ohngefähr denselben Werth erreicht. Da $\mu = 245^{\circ}\, 43'$ ist, so findet man dass in der grössten Phase

$$(t - \lambda - \mu) = 0^{\circ}\, 33'$$

also noch sehr klein ist, obgleich Nertschinsk beträchtlich weit von der Haupthöhencurve für die grösste Phase liegt. Der Coefficient von $dt - d\lambda$ hat hier also sehr nahe denselben Werth, welcher in dem Beispiel des Art. 53 angenommen wurde. Die vorstehenden Werthe der Positionswinkel θ_0 zeigen, dass die Beobachtungen der Ein- und Austritte nur geringen Werth haben können, und dass der Austritt grösseren Werth haben muss als der Eintritt, zeigt der Planiglob schon dadurch an, dass Nertschinsk der Haupthöhencurve für die Austritte näher liegt als der für die Eintritte. Dass die grösste Phase kurz nach dem wahren Mittage statt finden muss, zeigt auch der Planiglob an, indem Nertschinsk der Curve für die grösste Phase im Mittage sehr nahe, und auf der östlichen Seite derselben liegt.

Hakodadi (Khakodad, Hakooao).

$$\varphi = 41^{\circ}\, 46'\, 57'', \quad \lambda = 138^{\circ}\, 24'\, 42''$$

		w. Z. d. Beobachtungsortes	
Erste äussere Ränderberührung	Dec. 8.	$23^h\, 12^m\, 16^s$	
Erste innere » »		23 38 47	
Grösste Phase	Dec. 9.	1 36 22 ,	$b' = 2'\, 51''$
Zweite innere Ränderberührung		3 34 17	
Zweite äussere » »		4 0 58	

mit den Positionswinkeln

$$\begin{array}{llll} \theta = & 51^0\ 32' & \theta_0 = & 61^0\ 16' \\ = & 46\ \ 10 & = & 50\ \ 34 \\ = & 14\ \ 38 & = & 355\ \ 30 \\ = & 343\ \ \ 6 & = & 308\ \ 41 \\ = & 337\ \ 44 & = & 297\ \ \ 9 \end{array}$$

Die Distanzmessungen sind hier eben so einzurichten wie im vorigen Beispiel. Man sieht, dass hier kurze Zeit vor dem Eintreffen der grössten Phase $\theta_0 = 0$ wird, welches der Planiglob bestätigt, indem Hakodadi ein wenig östlich von der Haupthöhencurve liegt. In der grössten Phase wird hier

$$(t - \lambda - \mu) = -0^0\ 2'$$

also äusserst klein. Die Beobachtungen der Ein- und Austritte haben hier nur geringen Werth.

Kerguelens Inseln (Weihnachtshafen).

$$\varphi = -48^0\ 41'\ 15'',\quad \lambda = 66^0\ 42'\ 0''$$

		w. Z. d. Beobachtungsortes	
Erste äussere Ränderberührung	Dec. 8.	$18^h\ 39^m\ 54^s$	
Erste innere » »		19 10 19	
Grösste Phase		20 53 16,	$b' = 2'\ 13''$
Zweite innere Ränderberührung		22 36 36	
Zweite äussere » » .		23 6 13	

mit den Positionswinkeln

$$\begin{array}{llll} \theta = & 47^0\ 34' & \theta_0 = & 182^0\ 27' \\ = & 41\ \ 11 & = & 175\ \ 30 \\ = & 14\ \ 17 & = & 151\ \ 19 \\ = & 347\ \ \ 5 & = & 139\ \ 46 \\ = & 340\ \ 49 & = & 141\ \ 39 \end{array}$$

Die Eintritte haben hier, wie vorausgesehen werden konnte, eine günstige Lage, in der grössten Phase ist die Lage nicht ganz ungünstig, aber die Austritte haben fast gar keinen Werth, zumal die Sonne während derselben sehr hoch steht.

Aucklands-Inseln (Bai, Sarahs Busen).

$$\varphi = -50^0\,33'\,45'',\quad \lambda = 163^0\,54'\,27''$$

		w. Z. d. Beobachtungsortes			
Erste äussere Ränderberührung	Dec. 9.	1h	0m	48s	
Erste innere » »		1	30	0	
Grösste Phase		3	14	29,	$b' = 2'\,4''$
Zweite innere Ränderberührung		4	59	19	
Zweite äussere » »		5	29	1	

mit den Positionswinkeln

θ		θ_0	
$= 48^0$	$32'$	$= 247^0$	$59'$
$= 42$	23	$= 249$	10
$= 14$	50	$= 235$	59
$= 347$	18	$= 210$	53
$= 341$	6	$= 204$	4

Hier sind die Austritte, wie voraus zu sehen war, die günstigsten, und dass in denselben θ_0 sich 24^0 bis 31^0 von 180^0 entfernt, rührt davon her, dass die Aucklandsinseln ziemlich weit von der betreffenden Haupthöhencurve entfernt liegen. Sowohl die grösste Phase wie die Eintritte haben hier nur geringen Werth.

Ich füge dem Vorstehenden hinzu, dass ich die geographischen Positionen der Conn. des temps entnommen habe.

57.

Die Regeln, nach welchen im Vorhergehenden die verschiedenen Oerter in Bezug auf die Günstigkeit zur Bestimmung der Sonnenparallaxe beurtheilt worden sind, besitzen freilich keine vollständige geometrische Strenge, aber sie sind in solchem Grade genähert, dass sie eine sehr nahe richtige Einsicht in die Sachlage gewähren. Um vollständig genau die statt findenden Umstände in Erfahrung zu bringen, giebt es aber ein einfaches Mittel, und dieses besteht darin, dass man die Coefficienten der Bedingungsgleichungen für die Verbesserung der der Rechnung untergelegten Elemente nach den im Art. 40 u. f. dafür entwickelten Ausdrücken berechnet, denn diese zeigen mit vollständiger Schärfe die Günstigkeit oder Ungünstigkeit für die Erlangung der Sonnenparallaxe.

Ich habe diese Coefficienten daher für die vier im vor. Art. betrachteten Beobachtungsörter berechnet, und die folgenden Resultate erhalten,

deren jedes sich auf die fünf berechneten Zeitmomente bezieht. Die letzte Columne giebt die jedesmalige Sonnenhöhe.

Coefficienten der Bedingungsgleichungen.

Nertschinsk.

$d\varrho_0$	$d\lambda - dl'$	$d\beta$	$d\Lambda' \pm d\Lambda_1$	$d\lambda_0$	H
−0.2842	−0.7062	+0.6864	−0.3669	+0.01480	9° 21′
−0.4260	−0.6385	+0.7497	−0.3669	+0.01286	11 27
−0.9292	−0.1523	+0.9729	0	−0.00009	15 40
−0.7937	+0.3791	+0.9092	−0.3669	−0.01303	11 6
−0.6997	+0.4623	+0.8694	−0.3669	−0.01495	8 58

Hakodadi.

$d\varrho_0$	$d\lambda - dl'$	$d\beta$	$d\Lambda' \pm d\Lambda_1$	$d\lambda_0$	H
−0.4340	−0.7070	+0.6854	−0.3669	+0.01482	24° 26′
−0.5716	−0.6393	+0.7487	−0.3669	+0.01290	25 9
−0.9226	−0.1544	+0.9727	0	−0.00004	21 36
−0.5739	+0.3758	+0.9102	−0.3669	−0.01296	8 34
−0.4529	+0.4595	+0.8658	−0.3669	−0.01487	4 42

Kerguelens-Inseln.

$d\varrho_0$	$d\lambda - dl'$	$d\beta$	$d\Lambda' \pm d\Lambda_1$	$d\lambda_0$	H
+0.9206	−0.6578	+0.7328	−0.3669	+0.01341	23° 30′
+0.8790	−0.5723	+0.8015	−0.3669	+0.01102	28 30
+0.6192	−0.1486	+0.9737	0	−0.00018	45 16
+0.3908	+0.3116	+0.9366	−0.3669	−0.01147	59 32
+0.3700	+0.4119	+0.8967	−0.3669	−0.01380	62 15

Aucklands-Inseln.

$d\varrho_0$	$d\lambda - dl'$	$d\beta$	$d\Lambda' \pm d\Lambda_1$	$d\lambda_0$	H
+0.1910	−0.6701	+0.7216	−0.3669	+0.01376	60° 5′
+0.1952	−0.5889	+0.7895	−0.3669	+0.01147	57 21
+0.4093	−0.1581	+0.9720	0	+0.00005	43 29
+0.7648	+0.3077	+0.9352	−0.3669	−0.01137	27 4
+0.8447	+0.4071	+0.8963	−0.3669	−0.01367	22 24

Diese Coefficienten bestätigen die im Vorhergehenden abgeleiteten allgemeinen Bemerkungen, und prägen sie schärfer aus. Man sieht, dass die Coefficienten von $d\varrho_0$ für die Beobachtungsgattungen, die im Voraus

als günstig bezeichnet werden konnten, der Zahl Eins sehr nahe kommen, so wie dass die Coefficienten von $d\varrho_0$ für die Beobachtungen, die im Voraus als wenig günstig bezeichnet wurden, in der That viel kleiner als Eins sind.

In Nertschinsk und Hakodadi, die in den günstigen Bereich der isosthenischen Kreisbögen für die grösste Phase fallen, werden für diese die Coefficienten zwar hinreichend gross, aber für die Ein- und Austritte werden sie viel kleiner; die Coefficienten für die Austritte in Nertschinsk möchten indessen für hinreichend gross gehalten werden können. Auf den Kerguelens-Inseln, die in den günstigen Bereich der isosthenischen Kreisbögen für die Eintritte fallen, sind auch die Coefficienten für die Eintritte hinreichend gross, aber für die übrigen Phasen werden sie klein, und dasselbe trifft bei den Aucklands-Inseln in entgegen gesetzter Beziehung ein.

Man sieht ferner, dass die Coefficienten der übrigen Verbesserungen auf allen vier in Betracht gezogenen Stationen fast dieselben sind, und dass die Coefficienten für $d\lambda_0$ in der grössten Phase überall so klein werden, dass sie für Null erachtet werden können.

Ferner erkennt man, dass die Coefficienten von $d\varrho_0$ auf der nördlichen, und der südlichen Halbkugel entgegengesetzte Zeichen haben, während die Coefficienten der tabularischen Fehler $d\lambda - dl'$ und $d\beta$ dieselben Zeichen behalten. Hieraus entspringt die Eigenschaft, dass man durch Verbindung von Beobachtungen auf beiden Halbkugeln die Tafelfehler vom Fehler des vorläufig angenommenen Werthes der Sonnenparallaxe trennen, und beide sicher bestimmen kann.

Fragt man nach den Coefficienten der Bedingungsgleichungen für die Verweilungen, so bekommt man diese aus den vorstehenden durch blose Addition. Man erhält z. B. für die Aucklands-Inseln die folgenden Coefficienten für die Verweilungen zwischen den äusseren und inneren Ränderberührungen,

$d\varrho_0$	$d\lambda - dl'$	$d\beta$	$d\Delta' \pm d\Delta_1$	$d\lambda_0$
+1.0357	−0.2630	+1.6179	−0.7338	+0.00009
+0.9600	−0.2812	+1.7247	−0.7338	+0.00010

die dem Unterschied zwischen den betreffenden Berührungen entsprechen. Die Coefficienten von $d\lambda_0$ sind zwar sehr klein geworden, aber die Coefficienten von $d\varrho_0$ haben sich für eine sichere Bestimmung dieser



Grösse nicht hinreichend vergrössert. Da das Gewicht der Beobachtung einer Verweilung nur halb so gross ist, wie das Gewicht der Beobachtung einer Ränderberührung, so hätten, um gleiche Genauigkeit geben zu können, die vorstehenden Coefficienten von $d\varrho_0$ nahe gleich der Zahl Zwei werden müssen, während sie nur ohngefähr gleich Eins sind.

In Bezug auf $d\lambda_0$ bemerke ich noch, dass dieser Grösse selbstverständlich für jeden vorhandenen Beobachtungsort ein anderer Werth beigelegt werden muss, oder dass man eben so viele verschiedene $d\lambda_0$ einführen muss als Beobachtungsörter vorhanden sind. Ich wiederhole, dass man bei der Auflösung der Bedingungsgleichungen durch die Methode der kleinsten Quadrate, die Werthe der verschiedenen $d\lambda_0$ nicht zugleich bestimmen darf, da dieses eine schädliche Rückwirkung auf die Bestimmung der übrigen Unbekannten bewirken kann. Aber man braucht deshalb die Glieder, welche die $d\lambda_0$ enthalten, nicht wegzulassen, sondern kann sie in der Auflösung der Bedingungsgleichungen mit durchgehen lassen, und auf diese Weise die übrigen Unbekannten in Function der verschiedenen $d\lambda_0$ bestimmen; man gelangt dadurch zur Kenntniss des Einflusses, den die Fehler in den angenommenen Längen der Beobachtungsörter auf das Endresultat ausüben.

58.

Da in dem Venusvorübergange des Jahres 1874 die günstigen Beobachtungsörter auf der südlichen Halbkugel der Erde nur spärlich vorhanden sind, so habe ich, um genauer über den relativen Werth einiger derselben entscheiden zu können, die Coefficienten der Bedingungsgleichungen noch einiger anderer, dort allenfalls auch auswählbarer Stationen berechnet, bin aber dabei mit weniger Genauigkeit als bei den vorstehenden Oertern verfahren, und habe auch statt der Coefficienten der Ränderberührungen, die der Berührung des Venusmittelpunkts mit den Sonnenrändern angesetzt; man kann durch diese sich schon eine Vorstellung von der Grösse der Coefficienten für die Ränderberührungen machen.

Crozets-Inseln (Seegelbai).

$\varphi = -46^0\, 26'\, 18''$, $\lambda = 49^0\, 30'\, 19''$

Erste Berührung des Mittelpunkts	Dec. 8.	$17^h\ 47^m$	
Grösste Phase		19 45	, $b' = 2'\ 11''$
Zweite Berührung des Mittelpunkts		21 43	



mit den Positionswinkeln

$$\theta_0 = 179^\circ\!.1$$
$$= 145.7$$
$$= 122.9$$

und den Coefficienten der Bedingungsgleichungen

$d\varrho_0$	$d\lambda - dl'$	$d\beta$	$d\Delta' \pm d\Delta$,	$d\lambda_0$	H
+0.969	−0.615	+0.769	−0.367	+0.0119	14°3
+0.683	−0.149	+0.973	0	−0.0002	34.3
+0.318	+0.360	+0.916	−0.367	−0.0128	54.0

Edwards-Inseln (die westlichste).

$\varphi = -46^0\ 45'\ 0''$, $\lambda = 35^0\ 15'\ 55''$

Erste Berührung des Mittelpunkts Dec. 8. $16^h\ 51^m$
Grösste Phase . . . . 18 49, $b' = 2'\ 10''$
Zweite Berührung des Mittelpunkts 20 46

mit den Positionswinkeln

$$\theta_0 = 183^\circ\!.1$$
$$= 146.7$$
$$= 118.1$$

und den Coefficienten der Bedingungsgleichungen

$d\varrho_0$	$d\lambda - dl'$	$d\beta$	$d\Delta' \pm d\Delta$,	$d\lambda_0$	H
+0.994	−0.614	+0.771	−0.367	+0.0119	5°5
+0.760	−0.149	+0.974	0	−0.0002	24.6
+0.334	+0.357	+0.918	−0.367	−0.0128	44.7

Mauritius (Ludwigshafen).

$\varphi = -20^0\ 9'\ 45''$, $\lambda = 55^0\ 12'\ 0''$

Erste Berührung des Mittelpunkts Dec. 8. $18^h\ 8^m$
Grösste Phase . . . . 20 10, $b' = 2'\ 20''$
Zweite Berührung des Mittelpunkts 22 11

mit den Positionswinkeln

$$\theta_0 = 153^\circ\!.2$$
$$= 112.7$$
$$= 71.6$$

und den Coefficienten der Bedingungsgleichungen

$d\varrho_0$	$d\lambda - dl'$	$d\beta$	$d\Delta' \pm d\Delta_{,}$	$d\lambda_0$	H
+0.880	−0.629	+0.759	−0.367	+0.0126	9°5
+0.311	−0.148	+0.974	0	−0.0002	36.7
−0.139	+0.380	+0.910	−0.367	−0.0130	64.5

Es liessen sich noch mehrere solcher Oerter aufstellen, allein ich meine mich mit der Aufstellung der vorstehenden begnügen zu können.

Zusatz I.

Die Parallaxe der Distanz betreffend.

59.

In der Anmerkung des Art. 30 habe ich die isosthenischen Kreisbögen erwähnt, die Lagrange in Bezug auf die Parallaxe der Distanz erhalten hat, es kann daher von Interesse sein zu ermitteln, ob diese mit den hier entwickelten isosthenischen Kreisbögen, die sich auf den Coefficienten von $d\varrho_0$ beziehen, identisch sind oder nicht. Suchen wir zu dem Ende einen einfachen Ausdruck für die Parallaxe der Distanz. Denken wir uns, gleichwie Lagrangé, zwei Gestirne in messbaren Entfernungen von der Erde, denen in irgend einem Zeitpunkte die Horizontalparallaxen p und p' zukommen.

Seien in demselben Zeitpunkt der Azimuthunterschied dieser beiden Gestirne a, ihre vom Mittelpunkt der Erde aus gesehenen Höhen H und H', dieselben von irgend einem Punkt der Erdoberfläche aus gesehenen $H_{,}$ und $H'_{,}$, ihre vom Mittelpunkt der Erde aus gesehene gegenseitige Entfernung Z, und dieselbe von demselben Punkt der Erdoberfläche aus gesehene $Z_{,}$, dann erhalten wir sogleich

$$\cos Z = \sin H \sin H' + \cos H \cos H' \cos a$$
$$\cos Z_{,} = \sin H_{,} \sin H'_{,} + \cos H_{,} \cos H'_{,} \cos a$$

Mit Uebergehung der Quadrate und höheren Potenzen der Parallaxen sind aber

$$H_{,} = H - p \cos H$$
$$H'_{,} = H' - p' \cos H'$$

durch deren Substitution in die vorstehenden Gleichungen sich

$$\cos Z_, = \cos Z - p\,\{\cos H \sin H' - \sin H \cos H' \cos a\} \cos H$$
$$- p'\,\{\sin H \cos H' - \cos H \sin H' \cos a\} \cos H'$$

ergiebt. Betrachten wir das Dreieck, welches die obige Gleichung für $\cos Z$ gegeben hat, näher. In diesem sind die Seiten

$$Z,\ 90^0 - H,\ \ 90^0 - H'$$

und der der Seite Z gegenüberliegende Winkel ist a. Nennen wir die den beiden anderen Seiten bez. gegenüberliegenden Winkel θ_0 und θ'_0, so sind θ_0 und θ'_0 die vom bez. Verticalkreise an gezählten Positionswinkel des einen Gestirns in Bezug auf das andere, von welchen der eine oder der andere mit dem im Vorhergehenden θ_0 genannten Positionswinkel bis auf sehr Weniges identisch ist. Das bezeichnete Dreieck giebt aber

$$\begin{aligned}
\cos H' \cos a &= \cos Z \cos H - \sin Z \sin H \cos \theta_0' \\
\sin H' &= \cos Z \sin H + \sin Z \cos H \cos \theta_0' \\
\cos H \cos a &= \cos Z \cos H' - \sin Z \sin H' \cos \theta_0 \\
\sin H &= \cos Z \sin H' + \sin Z \cos H' \cos \theta_0
\end{aligned}$$

durch deren Anwendung der obige Ausdruck für $\cos Z$ in den folgenden übergeht,

$$\cos Z_, = \cos Z - p \sin Z \cos H \cos \theta_0' - p' \sin Z \cos H' \cos \theta_0$$

woraus

$$Z_, = Z + p \cos H \cos \theta'_0 + p' \cos H' \cos \theta_0$$

Die Parallaxe der Distanz hat also

$$p \cos H \cos \theta'_0 + p' \cos H' \cos \theta_0$$

zum Ausdruck, während der Coefficient von $d\varrho_0$ in der Gleichung zur Bestimmung der Sonnenparallaxe aus einem Venusvorübergange

$$\cos H' \cos \theta_0$$

zum Ausdruck hat, da nemlich hier H' sehr nahe dasselbe ist, was oben H war. Diese beiden Ausdrücke sind zwar mit einander verwandt, aber nicht identisch, und die isosthenischen Kreisbögen, die aus denselben entspringen, sind also auch mit einander nicht identisch.

Zusatz 2.

Von der Strahlenbrechung der Distanz und des Positionswinkels.

60.

Seien z' und z'' die scheinbaren Zenithdistanzen irgend zweier Punkte der Himmelskugel, a der Azimuthalunterschied derselben, D der Bogen grössten Kreises, welcher diese Punkte mit einander verbindet, also die scheinbare Distanz derselben. Theilen wir den Bogen D in zwei gleiche Theile, nennen die Zenithdistanz des Halbirungspunkts z, den Positionswinkel an diesem Punkte p, und bezeichnen die Azimuthalunterschiede zwischen z und z' mit a', und zwischen z und z'' mit a'', dann geben die beiden sphärischen Dreiecke, die somit entstehen,

$$\sin\tfrac{1}{2}D\sin p = \sin z'\sin a'$$
$$\sin\tfrac{1}{2}D\cos p = -\cos z'\sin z + \sin z'\cos z\cos a'$$

$$\sin\tfrac{1}{2}D\sin p = \sin z''\sin a''$$
$$\sin\tfrac{1}{2}D\cos p = \cos z''\sin z - \sin z''\cos z\cos a''$$

$$\cos\tfrac{1}{2}D = \cos z'\cos z + \sin z'\sin z\cos a'$$
$$= \cos z''\cos z + \sin z''\sin z\cos a''$$

Da nur die erste Potenz der Strahlenbrechung berücksichtigt zu werden braucht, so kann die Wirkung derselben auf D und p durch die Differentiation der vorstehenden Gleichungen ermittelt werden, wobei zu bemerken ist, dass auch a' und a'' veränderlich angenommen werden müssen. Da aber

$$a = a' + a''$$

und a von der Strahlenbrechung nicht geändert wird, so ergiebt sich

$$da' = -da''$$

Setzt man ferner, der Einrichtung der Strahlenbrechungstafeln gemäss,

$$dz' = r'\operatorname{tg} z'$$
$$dz'' = r''\operatorname{tg} z''$$

so giebt die Differentiation, nach einigen leichten Reductionen, zuerst

$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}D\sin p\,dD + \sin\tfrac{1}{2}D\cos p\,dp =$$
$$r'\sin\tfrac{1}{2}D\sin p + \sin z'\cos a'\,da'$$
$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}D\cos p\,dD - \sin\tfrac{1}{2}D\sin p\,dp =$$
$$r'\left(\sin\tfrac{1}{2}D\cos p + \frac{\sin z}{\cos z'}\right) - \cos\tfrac{1}{2}D\,dz - \sin z'\cos z\sin a'\,da'$$

$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}D\sin p\,dD + \sin\tfrac{1}{2}D\cos p\,dp =$$
$$r''\sin\tfrac{1}{2}D\sin p + \sin z''\cos a''\,da''$$
$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}D\cos p\,dD - \sin\tfrac{1}{2}D\sin p\,dp =$$
$$r''\left(\sin\tfrac{1}{2}D\cos p - \frac{\sin z}{\cos z''}\right) + \cos\tfrac{1}{2}D\,dz + \sin z''\cos z\sin a''\,da''$$

und durch die Elimination von dp aus diesen Gleichungen entstehen

$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}D\,dD = r'\left(\sin\tfrac{1}{2}D + \frac{\sin z}{\cos z'}\cos p\right) - \cos\tfrac{1}{2}D\cos p\,dz$$
$$+ \sin z'\,(\cos a'\sin p - \sin a'\cos p\cos z)\,da'$$
$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}D\,dD = r''\left(\sin\tfrac{1}{2}D - \frac{\sin z}{\cos z''}\cos p\right) + \cos\tfrac{1}{2}D\cos p\,dz$$
$$+ \sin z''\,(\cos a''\sin p + \sin a''\cos p\cos z)\,da''\;.$$

Man findet nun leicht, dass die Coefficienten von da' und da'' in diesen Gleichungen einander gleich sind, denn die beiden oben eingeführten Dreiecke geben, wenn mit p' und p'' die beiden, gleichartig gezählten, Positionswinkel an den Endpunkten von D bezeichnet werden,

$$\cos a'\sin p - \sin a'\cos p\cos z = \cos\tfrac{1}{2}D\sin p'$$
$$\cos a''\sin p + \sin a''\cos p\cos z = \cos\tfrac{1}{2}D\sin p''$$
$$\sin z'\sin p' = \sin z''\sin p'' = \sin z\sin p$$

Unsere Gleichungen werden hiemit

$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}D\,dD = r'\left(\sin\tfrac{1}{2}D + \frac{\sin z}{\cos z'}\cos p\right) - \cos\tfrac{1}{2}D\cos p\,dz + \cos\tfrac{1}{2}D\sin z\sin p\,da'$$
$$\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}D\,dD = r''\left(\sin\tfrac{1}{2}D - \frac{\sin z}{\cos z''}\cos p\right) + \cos\tfrac{1}{2}D\cos p\,dz + \cos\tfrac{1}{2}D\sin z\sin p\,da''$$

deren Summe, wegen $da' + da'' = 0$,

$$\cos\tfrac{1}{2}D\,dD = r'\left(\sin\tfrac{1}{2}D + \frac{\sin z}{\cos z'}\cos p\right) + r''\left(\sin\tfrac{1}{2}D - \frac{\sin z}{\cos z''}\cos p\right)$$

giebt. Diese Gleichung gilt für jeden Werth von D, nehmen wir aber an, dass D auch eine kleine Grösse erster Ordnung sei, von welcher nur die erste Potenz berücksichtigt zu werden braucht, so wird diese Gleichung, da jetzt

$$\frac{1}{\cos z'} = \frac{1}{\cos z} + \sin\tfrac{1}{2}D\,\frac{\sin z}{\cos^2 z}\cos p$$
$$\frac{1}{\cos z''} = \frac{1}{\cos z} - \sin\tfrac{1}{2}D\,\frac{\sin z}{\cos^2 z}\cos p$$

gesetzt werden dürfen,

$$dD = \tfrac{1}{2}r'\,D\,(1 + \mathrm{tg}^2 z\cos^2 p) + r'\,\mathrm{tg}\,z\cos p$$
$$+ \tfrac{1}{2}r''\,D\,(1 + \mathrm{tg}^2 z\cos^2 p) - r''\,\mathrm{tg}\,z\cos p$$

Seien ferner

$$r' + r'' = 2r$$
$$r' - r'' = 2\Delta r$$

dann kann r für den Coefficienten der Strahlenbrechung gehalten werden, welcher dem Halbirungspunkt des Bogens D, oder der Zenithdistanz z angehört, und eliminirt man hiemit r' und r'' aus dem vorstehenden Ausdruck, so bekommt man

$$dD = rD(1 + \mathrm{tg}^2 z \cos^2 p) + 2\Delta r \,\mathrm{tg}\, z \cos p$$

wobei wir vorläufig stehen bleiben wollen.

61.

Gehen wir zur Strahlenbrechung des Positionswinkels über. Aus dem vor. Art. nehme ich die Gleichungen

$$\tfrac{1}{2} \cos \tfrac{1}{2} D \sin p dD + \sin \tfrac{1}{2} D \cos p dp = r' \sin \tfrac{1}{2} D \sin p + \sin z' \cos a' da'$$

$$\tfrac{1}{2} \cos \tfrac{1}{2} D \sin p dD + \sin \tfrac{1}{2} D \cos p dp = r'' \sin \tfrac{1}{2} D \sin p + \sin z'' \cos a'' da''$$

und eliminire daraus, mit Benutzung der Gleichungen

$$\sin z' \cos a' = \cos \tfrac{1}{2} D \sin z + \sin \tfrac{1}{2} D \cos z \cos p$$

$$\sin z'' \cos a'' = \cos \tfrac{1}{2} D \sin z - \sin \tfrac{1}{2} D \cos z \cos p$$

$$0 = da' + da''$$

die Differentiale da' und da'', wodurch

$$2 \cos p dp = r' (\sin p + \mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2} D \,\mathrm{cotg}\, z \sin p \cos p) + r'' (\sin p - \mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2} D \,\mathrm{cotg}\, z \sin p \cos p) - \frac{\cos \frac{1}{2} D}{\sin \frac{1}{2} D} \sin p dD$$

erhalten wird, und schafft man hieraus dD durch die oben erhaltene Gleichung

$$\cos \tfrac{1}{2} D dD = r'\left(\sin \tfrac{1}{2} D + \frac{\sin z}{\cos z'} \cos p\right) + r''\left(\sin \tfrac{1}{2} D - \frac{\sin z}{\cos z''} \cos p\right)$$

fort, so ergiebt sich

$$dp = -\tfrac{1}{2} r' \left(\frac{\sin z}{\sin \frac{1}{2} D \cos z'} \sin p - \mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2} D \,\mathrm{cotg}\, z \sin p\right) + \tfrac{1}{2} r' \left(\frac{\sin z}{\sin \frac{1}{2} D \cos z''} \sin p - \mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2} D \,\mathrm{cotg}\, z \sin p\right)$$

welcher Ausdruck für jeden Werth von D gilt. Nimmt man wieder an, dass D eine kleine Grösse erster Ordnung sei, und eliminirt $\cos z'$ und $\cos z''$ durch die im vor. Art. dafür gegebenen Ausdrücke, so verwandelt sich der Ausdruck für dp in den folgenden,

$$dp = -\tfrac{1}{2} r' \left(\frac{\mathrm{tg}\, z \sin p}{\sin \frac{1}{2} D} + \mathrm{tg}^2 z \sin p \cos p\right) + \tfrac{1}{2} r'' \left(\frac{\mathrm{tg}\, z \sin p}{\sin \frac{1}{2} D} - \mathrm{tg}^2 z \sin p \cos p\right)$$

woraus durch die Einführung von r und $\varDelta r$

$$dp = -r\,\mathrm{tg}^2 z\,\sin p\,\cos p - 2\varDelta r\,\frac{\mathrm{tg}\,z\,\sin p}{D}$$

entsteht.

62.

Die im vor. und vorvor. Art. enthaltenen Ausdrücke für dp und dD sind schon für die Anwendung geeignet, allein sie können in andere umgestaltet werden, die zweckmässiger sind. Zuerst bemerke ich, dass zufolge des Taylorschen Satzes mit hier ausreichender Genauigkeit

$$2\varDelta r = \frac{dr}{dz}(z'-z'')$$

ist, wofür man auch

$$2\varDelta r = r\,\frac{d.\log r}{m\,dz}(z'-z'')$$

schreiben kann, wenn m den Modul der angewandten Logarithmen bedeutet. Ferner ist mit demselben Grade der Genauigkeit

$$z'-z'' = D\cos p$$

und hiemit gehen die genannten Ausdrücke in die folgenden über,

$$dD = r\,D\,(1+\mathrm{tg}^2 z\,\cos^2 p) + r\,D\,\frac{d.\log r}{m\,dz}\,\mathrm{tg}\,z\,\cos^2 p$$

$$dp = -r\,\mathrm{tg}^2 z\,\sin p\,\cos p - r\,\frac{d.\log r}{m\,dz}\,\mathrm{tg}\,z\,\sin p\,\cos p$$

Setzt man nun

$$r_0 = r + r\,\frac{d.\log r}{m\,dz}\,\sin z\,\cos z$$

und führt r_0 in die ersten Glieder der vorstehenden Gleichungen ein, so werden diese

$$dD = r_0 D\,(1+\mathrm{tg}^2 z\,\cos^2 p) - r\,D\,\frac{d.\log r}{m\,dz}\,\sin z\,\cos z\,\sin^2 p$$

$$dp = -r_0\,\mathrm{tg}^2 z\,\sin p\,\cos p - r\,\frac{d.\log r}{m\,dz}\,\sin z\,\cos z\,\sin p\,\cos p$$

Der Vortheil, den diese Ausdrücke, den vorhergehenden gegenüber, gewähren, besteht darin, dass die zweiten Glieder derselben so klein sind, dass man sie nur in den seltensten Fällen zu berücksichtigen braucht. Sie wachsen *ceteris paribus* mit der Zenithdistanz, man wird aber aus der unten folgenden Tafel sehen, dass, wenn man die wahren Werthe von z und p anwendet, bei $z = 85^0$ und $D = 1000''$ die Maxima der zweiten Glieder in

dD . . . 0″054

dp . . . 5″5

betragen. Nimmt man hingegen für z und p die scheinbaren Werthe, so werden diese Maxima in

$$dD \ldots 0\overset{''}{.}045$$
$$dp \ldots 4\overset{''}{.}7$$

die gemeiniglich bei Beobachtungen unter der genannten Zenithdistanz vergeben werden können, zumal da in dem Positionswinkel eine Genauigkeit bis auf $0\overset{'}{,}1$ gewöhnlich ausreicht. Diese Maxima treffen für die Distanz bei $p = 90^0$, und $= 270^0$, und für den Positionswinkel bei $p = 45^0$ oder $= 135^0$, oder $= 225^0$, oder $= 315^0$ ein, und da aus der vorstehenden Abhandlung hervorgeht, dass bei den Beobachtungen der Venusvorübergänge Positionswinkel, die in der Nähe von 90^0 oder 270^0 liegen, vermieden werden müssen, so werden die obigen zweiten Glieder bei der Reduction der Beobachtungen dieser Erscheinung wohl übergangen werden können. Um aber Nichts zu vergeben, habe ich sie in der unten folgenden Tafel für die numerischen Werthe von r_0 mit aufgenommen.

63.

Es ist noch der Einfluss des Standes der meteorologischen Instrumente auf den Werth von r_0 zu entwickeln. Ich werde von der Besselschen Form der Strahlenbrechung ausgehen, nemlich

$$r = \alpha\beta^A\gamma^\lambda$$

setzen, wo β vom Barometer-, und γ vom Thermometerstand abhängig, von der Zenithdistanz unabhängig sind, während α, A, λ blos von der Zenithdistanz abhängen. Eben so soll

$$r_0 = \alpha_0\beta^{A_0}\gamma^{\lambda_0}$$

sein, und es sind daher die Ausdrücke für α_0, A_0, λ_0 unabhängig von β und γ zu entwickeln.

Nehmen wir von der oben eingeführten Relation

$$r_0 = r + r\frac{d.\log r}{m\,dz}\sin z\cos z$$

den Logarithmus, und setzen in diesen die vorstehenden Ausdrücke von r und r_0, dann erhalten wir die Gleichung

$$\log\alpha_0 + A_0\log\beta + \lambda_0\log\gamma = \log\alpha + A\log\beta + \lambda\log\gamma$$
$$+ \log\left\{1 + \frac{d.\log\alpha}{mdz}\sin z\cos z + \left[\frac{dA}{mdz}\log\beta + \frac{d\lambda}{mdz}\log\gamma\right]\sin z\cos z\right\}$$
$$= \log\alpha + A\log\beta + \lambda\log\gamma$$
$$+ \log\left\{1 + \frac{d.\log\alpha}{mdz}\sin z\cos z\right\}$$
$$+ \log\left\{1 + \frac{\frac{dA}{mdz}\log\beta + \frac{d\lambda}{mdz}\log\gamma}{1 + \frac{d.\log\alpha}{mdz}\sin z\cos z}\sin z\cos z\right\}$$

oder wenn der letzte Logarithmus in eine Reihe aufgelöst wird, und man bei der ersten Potenz der immer kleinen Differentiale von A und γ stehen bleibt,

$$\log\alpha_0 + A_0\log\beta + \lambda_0\log\gamma = \log\alpha + A\log\beta + \lambda\log\gamma$$
$$+ \log\left\{1 + \frac{d.\log\alpha}{mdz}\sin z\cos z\right\}$$
$$+ \frac{\frac{dA}{dz}\sin z\cos z}{1 + \frac{d.\log\alpha}{mdz}\sin z\cos z}\log\beta + \frac{\frac{d\lambda}{dz}\sin z\cos z}{1 + \frac{d.\log\alpha}{mdz}\sin z\cos z}$$

und da dieser Ausdruck unabhängig von β und γ statt finden muss,

$$\alpha_0 = \alpha\left\{1 + \frac{d.\log\alpha}{mdz}\sin z\cos z\right\}$$
$$A_0 = A + \frac{\alpha}{\alpha_0}\frac{dA}{dz}\sin z\cos z$$
$$\lambda_0 = \lambda + \frac{\alpha}{\alpha_0}\frac{d\lambda}{dz}\sin z\cos z$$

Nach diesen Ausdrücken, und indem ich

$$\alpha'_0 = -r\frac{d.\log r}{mdz}\sin z\cos z$$

setzte, habe ich mit Zugrundelegung der Besselschen Strahlenbrechungstafel, deren Argument die scheinbare Zenithdistanz ist,*) die erste Abtheilung der unten folgenden Tafel berechnet, welche $\log\alpha_0$, $\log\alpha'_0$, A_0, λ_0 giebt. Die beiden Logarithmen gehören den in Theilen des Kreisradius ausgedrückten Werthen von α_0 und α'_0 an, weshalb in dem Ausdruck für die Strahlenbrechung der Distanz der Factor D in Secunden auszudrücken ist. Da es zweckmässig erscheint, den Positionswinkel und die dahin gehörige Strahlenbrechung in Minuten und Decimaltheilen davon auszudrücken, so ist der obige Ausdruck für die letztere mit 3437,7 zu multipliciren.

*) Bessel, Astronomische Untersuchungen. Erster Theil, Seite 198 u. 199. Tafel I.

64.

In den vorstehenden Ableitungen sind wir von den scheinbaren Zenithdistanzen ausgegangen, und selbstverständlich sind daher auch in den erhaltenen Ausdrücken für die Strahlenbrechungen auch die scheinbaren Werthe von D und p zu substituiren. Es ist aber sehr leicht zu erkennen, dass wir auch von den wahren Zenithdistanzen hätten ausgehen können, und dass wir in diesem Falle dieselben Ausdrücke für die Strahlenbrechungen erhalten haben würden, nur müssten in diesem Falle die wahren Werthe von D und p darin substituirt werden.

In der Anwendung kann sich ereignen, dass es in gewissen Fällen am Angemessensten ist jene Werthe, und in gewissen anderen Fällen diese Werthe anzuwenden, und deshalb habe ich der im vor. Art. erwähnten Tafel die zweite Abtheilung hinzugefügt, deren Argument die wahre Zenithdistanz ist, und deren Anwendung folglich auch den wahren Werth von D und p verlangt. Wenn der wahre Werth von z bekannt ist, so kann man auch leicht den wahren Werth von p erhalten, aber von D kennt man gemeiniglich nur den scheinbaren Werth und deshalb ist die Anwendung dieser Abtheilung der Tafel von jener etwas verschieden, insofern die Strahlenbrechung der Distanz zu berechnen ist.

Sei wie vorher D die scheinbare, und $D + dD$ die wahre Distanz, wobei bemerkt werden kann, dass dD immer positiv ist. Nehmen wir nun blos das erste Glied der Strahlenbrechung der Distanz vor, da die auszuführende Reduction auf das zweite, sehr kleine Glied keinen merklichen Einfluss äussern kann. Wir haben also jetzt

$$dD = r_0 (D + dD)(1 + \text{tg}^2 z \cos^2 p)$$

wo unter z und p die wahren Werthe derselben zu verstehen sind. Dieser Ausdruck kann nun, in der Voraussetzung, dass r_0 in Theilen des Kreisradius ausgedrückt wird, wie in der Tafel der Fall ist, in die folgenden umgeformt werden. Sei

$$x = r_0 (1 + \text{tg}^2 z \cos^2 p)$$

dann wird

$$dD = D \frac{x}{1 - x}$$

und nach diesen Ausdrücken ist also die Strahlenbrechung der Distanz aus der zweiten Abtheilung der Tafel zu berechnen, während die Berechnung der Strahlenbrechung des Positionswinkels keine Abänderung erleidet. Zu bemerken ist hiebei noch, dass der Divisor $1 - x$ nur für sehr grosse Zenithdistanzen und Distanzen der beiden Gestirne merklich

von der Eins verschieden ist, und dass man ihn bis $z = 75^0$ wohl immer unberücksichtigt lassen kann.

Ich lasse nicht unerwähnt, dass man, wenigstens annähernd, den Divisor $1 - x$ dem Factor r_0 einverleiben kann, wenn man $\frac{r_0}{1 - r\sec^2 z}$ statt r_0 in die Tafel aufnimmt. Allein dieses ist erstens nicht genau, und zweitens würde die Anwendung des so abgeänderten Factors auf die Strahlenbrechung des Positionswinkels diese fehlerhaft machen. Ich führe noch an, dass ich die oben entwickelten Formeln für dD und dp, so wie eine Tafel für $\log \alpha_0$ schon im Jahre 1827, in meiner Abhandlung über das Heliometer, gegeben habe.

65.

Tafel für die Strahlenbrechung der Distanz und des Positionswinkels.

	Arg. Scheinbare Zenithdistanz.						Arg. Wahre Zenithdistanz.					
z	$\log \alpha_0$	$D.$	$\log \alpha'_0$	$D.$	A_0	λ_0	$\log \alpha_0$	$D.$	$\log \alpha'_0$	$D.$	A_0	λ_0
0°	6.4472	1					6.4472	1				
10	471	3					471	3				
20	468	4					468	4				
30	464	5					464	7				
40	459	4				1.002	457					1.002
45	6.4455	6				1.003	6.4452	8				1.003
50	449	9				1.006	444	13				1.005
55	440	3				1.010	431	3				1.008
56	6.4437	3				1.011	6.4428	3				1.008
57	434	3				1.012	425	4				1.009
58	431	3				1.012	421	4				1.009
59	428	4				1.013	417	4				1.010
60	424	4	4.312	30		1.013	413	5	4.393	32		1.011
61	6.4420	4	4.342	31		1.014	6.4408	5	4.425	34		1.012
62	416	4	4.373	32		1.016	403	6	4.459	36		1.013
63	412	5	4.405	34		1.017	397	7	4.495	37		1.014
64	407	6	4.439	37		1.018	390	7	4.532	38		1.015
65	401	6	4.476	38		1.020	383	8	4.570	38		1.016
66	6.4395	8	4.514	40		1.022	6.4375	9	4.608	38		1.018
67	387	9	4.554	42		1.024	366	10	4.646	39		1.020
68	378	10	4.596	42		1.027	356	13	4.685	42		1.022
69	368	11	4.638	44		1.030	343	15	4.727	44		1.024
70	357	13	4.682	45		1.033	328	16	4.771	46		1.027
71	6.4344	15	4.727	47		1.037	6.4312	18	4.817	48		1.029
72	329	18	4.774	50		1.041	294	21	4.865	48		1.032
73	311	21	4.824	53		1.045	273	25	4.913	50		1.035
74	290	23	4.877	55	1.005	1.049	248	30	4.963	52	0.993	1.039
75	267		4.932		1.006	1.053	218		5.015		0.992	1.045

Tafel für die Strahlenbrechung der Distanz und des Positionswinkels.

	Arg. Scheinbare Zenithdistanz.						Arg. Wahre Zenithdistanz.					
z	$\log \alpha_0$	D.	$\log \alpha'_0$	D.	A_0	λ_0	$\log \alpha_0$	D.	$\log \alpha'_0$	D.	A_0	λ_0
75° 0′	6.4267	15	4.932	28	1.006	1.053	6.4218	18	5.015	27	0.992	1.045
30	252	16	4.960	29	1.006	1.057	200	19	5.042	28	0.992	1.048
76 0	236	18	4.989	29	1.007	1.062	181	20	5.070	29	0.992	1.051
30	218	19	5.018	29	1.007	1.068	161	23	5.099	29	0.992	1.055
77 0	199	21	5.047	30	1.008	1.074	138	26	5.128	30	0.991	1.060
30	178	23	5.077	10	1.008	1.082	112	29	5.158	31	0.991	1.065
78 0	6.4155	8	5.107	10	1.009	1.087	6.4083	11	5.189	10	0.991	1.070
10	147	9	5.117	11	1.009	1.089	072	11	5.199	11	0.991	1.071
20	138	9	5.128	11	1.009	1.093	061	11	5.210	11	0.991	1.073
30	129	9	5.139	11	1.009	1.096	050	12	5.221	11	0.991	1.075
40	120	10	5.150	11	1.009	1.098	038	12	5.232	11	0.991	1.077
50	110	10	5.161	11	1.010	1.100	026	13	5.243	11	0.990	1.079
79 0	6.4100	11	5.172	12	1.010	1.103	6.4013	13	5.254	11	0.990	1.081
10	089	11	5.184	12	1.010	1.105	6.4000	14	5.265	12	0.990	1.082
20	078	12	5.196	12	1.010	1.107	6.3986	15	5.277	12	0.989	1.084
30	066	12	5.208	13	1.010	1.110	971	15	5.289	13	0.989	1.086
40	054	14	5.221	13	1.010	1.112	956	16	5.302	13	0.989	1.088
50	040	15	5.234	14	1.011	1.114	940	17	5.315	14	0.988	1.090
80 0	6.4025	15	5.248	12	1.011	1.117	6.3923	17	5.329	12	0.988	1.092
10	6.4010	15	5.260	12	1.011	1.119	906	19	5.341	12	0.987	1.094
20	6.3995	15	5.272	12	1.012	1.121	887	19	5.353	12	0.987	1.097
30	980	15	5.284	12	1.012	1.124	868	20	5.365	13	0.986	1.099
40	965	15	5.296	11	1.013	1.127	848	20	5.378	12	0.986	1.102
50	950	16	5.307	12	1.013	1.131	828	21	5.390	12	0.985	1.104
81 0	6.3934	16	5.319	11	1.014	1.135	6.3807	22	5.402	12	0.985	1.107
10	918	18	5.330	12	1.014	1.140	785	22	5.414	13	0.985	1.110
20	900	19	5.342	12	1.015	1.146	763	23	5.427	12	0.985	1.114
30	881	21	5.354	13	1.015	1.152	740	25	5.439	12	0.984	1.118
40	860	22	5.367	13	1.015	1.158	715	26	5.451	12	0.984	1.122
50	838	24	5.380	14	1.016	1.164	689	28	5.463	13	0.984	1.126
82 0	6.3814	25	5.394	15	1.017	1.171	6.3661	29	5.476	13	0.983	1.131
10	789	26	5.409	14	1.018	1.177	632	32	5.489	14	0.983	1.136
20	763	26	5.423	14	1.018	1.183	600	33	5.503	14	0.982	1.141
30	737	27	5.437	14	1.019	1.190	567	36	5.517	15	0.981	1.146
40	710	30	5.451	14	1.020	1.196	531	38	5.532	14	0.980	1.151
50	680	32	5.465	14	1.021	1.203	493	40	5.546	15	0.979	1.156
83 0	6.3648	34	5.479	15	[illegible]	1.210	6.3453	41	5.561	15	0.978	1.161
10	614	37	5.494	16	1.022	1.216	412	44	5.576	14	0.977	1.166
20	577	40	5.510	16	1.023	1.223	368	48	5.590	15	0.976	1.171
30	537	42	5.526	17	1.024	1.230	320	51	5.605	15	0.975	1.177
40	495	45	5.543	17	1.025	1.238	269	53	5.620	15	0.974	1.182
50	450	48	5.560	16	1.026	1.246	216	56	5.635	14	0.973	1.187
84 0	402		5.576		1.027	1.254	160		5.649		0.972	1.193

Tafel für die Strahlenbrechung der Distanz und des Positionswinkels.

	Arg. Scheinbare Zenithdistanz.						Arg. Wahre Zenithdistanz.					
z	$\log \alpha_0$	$D.$	$\log \alpha'_0$	$D.$	A_0	λ_0	$\log \alpha_0$	$D.$	$\log \alpha'_0$	$D.$	A_0	λ_0
84° 0′	6.3402	51	5.576	16	1.027	1.254	6.3160	60	5.649	15	0.972	1.193
10	351	52	5.592	16	1.028	1.263	100	64	5.664	15	0.971	1.198
20	299	53	5.608	14	1.029	1.272	6.3036	67	5.679	14	0.969	1.204
30	246	54	5.622	13	1.031	1.282	6.2969	69	5.693	14	0.967	1.210
40	192	54	5.635	11	1.032	1.291	900	72	5.707	13	0.965	1.215
50	138	55	5.646	11	1.034	1.301	828	73	5.720	13	0.963	1.221
84 0	083		5.657		1.036	1.311	755		5.733		0.961	1.227

Arg. Stand des Thermometers am Barometer.

Fahrenheit.	
	$\log T$
−30°	+0.0024
−20	20
−10	16
0	13
10	9
20	5
30	+0.0001
40	− 0.003
50	7
60	11
70	15
80	19
90	23
100	−0.0026

Reaumur.	
	$\log T$
−35°	+0.0031
−30	26
−25	22
−20	18
−15	13
−10	9
− 5	+0.0004
0	0.0000
5	−0.0004
10	9
15	13
20	18
25	22
30	26
35	−0.0031

Centesimal.	
	$\log T$
−35°	+0.0025
−30	21
−25	18
−20	14
−15	11
−10	7
− 5	+0.0004
0	0.0000
5	−0.0004
10	7
15	11
20	14
25	18
30	21
35	−0.0024

Arg. Barometerstand.

Pariser Linien.	log B
315	−0.0245
316	231
317	217
318	203
319	190
320	176
321	163
322	149
323	136
324	122
325	109
326	95
327	82
328	69
329	56
330	43
331	29
332	16
333	−0.0003
334	+0.0010
335	23
336	36
337	49
338	62
339	74
340	87
341	100
342	113
343	125
344	138
345	151
346	163
347	176
348	188
349	201
350	+0.0213

Englische Zolle.	log B
27.5	−0.0319
27.6	303
27.7	288
27.8	282
27.9	256
28.0	241
28.1	225
28.2	210
28.3	195
28.4	179
28.5	164
28.6	149
28.7	134
28.8	119
28.9	104
29.0	89
29.1	74
29.2	59
29.3	44
29.4	29
29.5	−0.0014
29.6	+0.0001
29.7	15
29.8	30
29.9	44
30.0	59
30.1	73
30.2	88
30.3	102
30.4	116
30.5	131
30.6	145
30.7	159
30.8	173
30.9	187
31.0	+0.0201

Millimeter.	log B	Millimeter.	log B
710	−0.0248	750	−0.0010
711	242	751	−0.0004
712	236	752	+0.0002
713	230	753	8
714	224	754	13
715	218	755	19
716	212	756	25
717	205	757	30
718	199	758	36
719	193	759	42
720	187	760	48
721	181	761	53
722	175	762	59
723	169	763	65
724	163	764	70
725	157	765	76
726	151	766	82
727	145	767	87
728	139	768	93
729	133	769	99
730	127	770	104
731	122	771	110
732	116	772	116
733	110	773	121
734	104	774	127
735	98	775	132
736	92	776	138
737	86	777	144
738	80	778	149
739	74	779	155
740	68	780	160
741	63	781	166
742	57	782	171
743	51	783	177
744	45	784	183
745	39	785	188
746	33	786	194
747	27	787	199
748	22	788	204
749	16	789	210
750	−0.0010	790	+0.0216

Arg. Stand des Thermometers im Freien.

Fahrenheit.

	log γ		log γ
−20°	+0.0628	28°	+0.0180
−19	618	29	171
−18	608	30	162
−17	599	31	154
−16	589	32	145
−15	579	33	136
−14	569	34	127
−13	560	35	119
−12	550	36	110
−11	540	37	101
−10	531	38	92
− 9	521	39	84
− 8	512	40	75
− 7	502	41	66
− 6	492	42	58
− 5	483	43	49
− 4	473	44	41
− 3	464	45	32
− 2	455	46	23
− 1	445	47	15
0	436	48	+0.0006
1	426	49	−0.0002
2	417	50	11
3	408	51	19
4	398	52	28
5	389	53	36
6	380	54	44
7	370	55	53
8	361	56	61
9	352	57	70
10	343	58	78
11	334	59	86
12	324	60	95
13	315	61	103
14	306	62	111
15	297	63	120
16	288	64	128
17	279	65	136
18	270	66	144
19	261	67	153
20	252	68	161
21	243	69	169
22	234	70	177
23	225	71	185
24	216	72	193
25	207	73	202
26	198	74	210
27	189	75	218
28	+0.0180	76	−0.0226

Réaumur.

	log γ
−35°	+0.0899
−30	783
−25	670
−24	648
−23	625
−22	603
−21	582
−20	560
−19	538
−18	516
−17	495
−16	473
−15	452
−14	431
−13	410
−12	389
−11	368
−10	347
− 9	327
− 8	306
− 7	286
− 6	265
− 5	245
− 4	225
− 3	205
− 2	185
− 1	165
0	145
1	125
2	105
3	86
4	66
5	47
6	28
7	+0.0009
8	−0.0011
9	30
10	49
11	68
12	86
13	105
14	124
15	142
16	161
17	179
18	197
19	216
20	234
21	−0.0252

Centesimal.

	log γ
−35°	+0.0737
−30	648
−25	560
−24	542
−23	525
−22	508
−21	491
−20	473
−19	456
−18	439
−17	423
−16	406
−15	389
−14	372
−13	356
−12	339
−11	323
−10	306
− 9	290
− 8	273
− 7	257
− 6	241
− 5	225
− 4	209
− 3	193
− 2	177
− 1	161
0	145
1	129
2	113
3	98
4	82
5	66
6	51
7	35
8	20
9	+0.0005
10	−0.0011
11	26
12	41
13	56
14	71
15	86
16	101
17	116
18	131
19	146
20	161
21	−0.0175

Arg. Stand des Thermometers im Freien.

Fahrenheit.	log γ		log γ
76°	−0.0226	83°	−0.0282
77	234	84	290
78	242	85	298
79	250	86	306
80	258	87	314
81	266	88	322
82	274	89	329
83	−0.0282	90	−0.0337

Réaumur.	log γ
21°	−0.0252
22	270
23	288
24	306
25	324
30	414
35	−0.0498

Centesimal.	log γ
21°	−0.0175
22	190
23	205
24	219
25	234
30	306
35	−0.0377

Die Strahlenbrechung der Distanz findet man aus den vorstehenden Tafeln auf folgende Weise.

1) Mit Zugrundelegung der scheinbaren Werthe von z, p, D, und Benutzung der ersten Abtheilung der ersten Tafel:

$$\log P = \log \alpha_0 + A_0 (\log B + \log T) + \lambda_0 \log \gamma + \log D$$
$$\log Q = \log P + 2 \log \operatorname{tg} z + 2 \log \cos p$$
$$\log R = \log \alpha'_0 + \log D + 2 \log \sin p$$
$$dD = P + Q + R$$

2) Mit Zugrundelegung der wahren Werthe von z und p, aber des scheinbaren Werthes von D und Benutzung der zweiten Abtheilung der ersten Tafel:

$$\log r_0 = \log \alpha_0 + A_0 (\log B + \log T) + \lambda_0 \log \gamma$$
$$\log y = \log r_0 + 2 \log \operatorname{tg} z + 2 \log \cos p$$
$$x = r_0 + y$$
$$\log Q = \log D + \log x - \log (1 - x)$$
$$\log R = \log \alpha'_0 + \log D + 2 \log \sin p$$
$$dD = Q + R$$

Die Strahlenbrechung des Positionswinkels findet man in beiden Fällen, je nach Benutzung der ersten oder der zweiten Abtheilung der ersten Tafel auf folgende Weise:

$$\log H = 3.5363 + \log r_0 + 2 \log \operatorname{tg} z + \log \sin p \cos p$$
$$\log K = 3.536 \quad + \log \alpha'_0 + \log \sin p \cos p$$
$$dp = - H + K$$

Die Strahlenbrechung der Distanz erhält man durch diese Ausdrücke in Secunden, wenn man D in Secunden ausgedrückt substituirt, und die

des Positionswinkels jedenfalls in Minuten ausgedrückt; es sind jedoch bei der Berechnung der letzteren die algebraischen Vorzeichen von $\sin p$ und $\cos p$ zu beachten. Die Glieder R und K können gemeiniglich übergangen werden.

66.

Um die Genauigkeit der vorstehenden ersten Tafel durch ein Beispiel anschaulich zu machen, will ich zwei Punkte in einem und demselben Verticalkreise annehmen, die 30′ von einander entfernt sind, und deren scheinbare Zenithdistanzen 84° 30′ und 85° 0′ betragen, folglich $z = 84^0\ 45'$, $D = 30'$ werden. Diese Lage der beiden Punkte bedingt bis auf sehr Weniges die grösste Strahlenbrechung, die überhaupt aus den vorstehenden Tafeln hervorgehen kann, und ist einer einfachen Prüfung fähig.

Es soll nun für diese beiden Punkte die Strahlenbrechung der Distanz in fünf verschiedenen Annahmen über den Stand der meteorologischen Instrumente berechnet werden, und zwar

1) für $\log B + \log T = 0$ $\qquad \log\gamma = 0$
2) für $\log B + \log T = +\ 0.02160$, $\log\gamma = 0$
3) für $\log B + \log T = 0$ $\qquad \log\gamma = +\ 0.06050$
4) für $\log B + \log T = +\ 0.02160$, $\log\gamma = +\ 0.06050$
5) für $\log B + \log T = -\ 0.02160$, $\log\gamma = -\ 0.06050$

welche nahe die grössten Werthe dieser Factoren sind, die vorkommen können.

Da nun die erste Abtheilung der obigen Tafel für $z = 84^0\ 45'$

$$\log\alpha_0 = 6.3165, \qquad A_0 = 1.033, \qquad \lambda_0 = 1.296$$

giebt, und im gegenwärtigen Falle das zweite Glied der Strahlenbrechung der Distanz Null ist, so erhalten wir für diese fünf Fälle

$$\log\alpha_0 + A_0(\log B + \log T) + \lambda_0 \log\gamma =$$

1) 6.3165, und hiemit $dD = 44''56$
2) 6.3388, $\qquad = 46.90$
3) 6.3949, $\qquad = 53.37$
4) 6.4172, $\qquad = 56.18$
5) 6.2158, $\qquad = 35.34$

Da im gegenwärtigen Falle die Strahlenbrechung der Distanz dem Unterschiede der Strahlenbrechungen in den zwei Endpunkten derselben gleich ist, so können die vorstehenden Resultate durch Berechnung dieser beiden Strahlenbrechungen geprüft werden. Die a. a. O. befindliche Besselsche Tafel I giebt zu dem Ende für $z = 84^0\,30'$

$$\log\alpha = 1.71749, \qquad A = 1.0110, \qquad \lambda = 1.1082$$

und hiemit erhält man

$$\log\alpha + A(\log B + \log T) + \lambda\log\gamma =$$

1) 1.71749 , Strahlenbrechung = 541″89
2) 1.73933 , = 569.84
3) 1.78455 , = 632.37
4) 1.80639 , = 664.99
5) 1.62859 , = 441.58

Dieselbe Tafel giebt für $z = 85^0\,0'$

$$\log\alpha = 1.71020, \qquad A = 1.0127, \qquad \lambda = 1.1229$$

also

$$\log\alpha + A(\log B + \log T) + \lambda\log\gamma =$$

1) 1.71020 , Strahlenbrechung = 586″47
2) 1.73207 , = 616.77
3) 1.77814 , = 685.79
4) 1.80001 , = 721.20
5) 1.62039 , = 476.91

und die Unterschiede dieser Strahlenbrechungen geben

dD = 44″58 , Unterschiede gegen oben = − 0″02
= 46.93 , = − 0.03
= 53.42 , = − 0.05
= 56.21 , = − 0.03
= 35.33 , = + 0.01

welches eine befriedigende Uebereinstimmung ist.

67.

Prüfen wir die zweite Abtheilung der obigen Tafel auf dieselbe Art. Seien wieder

$$z = 84^0\ 45', \quad D = 30'$$

wo aber unter z die wahre Zenithdistanz verstanden werden muss; der leichteren Vergleichung wegen soll auch hier unter D die wahre Distanz verstanden werden, weshalb die Rechnung nach den obigen Vorschriften für die erste Abtheilung der Tafel durchzuführen ist. Die zweite Abtheilung der Tafel giebt nun

$$\log \alpha_0 = 6.2864\,, \quad A_0 = 0.964\,, \quad \lambda_0 = 1.218$$

also

$$\log \alpha_0 + A_0 (\log B + \log T) + \lambda_0 \log \gamma =$$

1) 6.2864 , und hiemit dD = 41″58
2) 6.3072 , = 43.62
3) 6.3601 , = 49.26
4) 6.3809 , = 51.68
5) 6.1919 , = 33.45

Die Besselsche Tafel II d. a. O. giebt für $z = 84^0\ 30'$

$$\log \alpha' = 1.70782, \quad A' = 0.9888, \quad \lambda' = 1.0802$$

also

$$\log \alpha' + A' (\log B + \log T) + \lambda' \log \gamma =$$

1) 1.70782 , Strahlenbrechung = 529″95
2) 1.72918 , = 556.68
3) 1.77317 , = 616.01
4) 1.79453 , = 647.07
5) 1.62111 , = 434.04

Dieselbe Tafel giebt für $z = 85^0\ 0'$

$$\log \alpha' = 1.69902, \quad A' = 0.9870, \quad \lambda' = 1.0903$$

also

$$\log \alpha' + A' (\log B + \log T) + \lambda' \log \gamma =$$

1) 1.69902 , Strahlenbrechung = 571″57
2) 1.72034 , = 600.33
3) 1.76498 , = 665.32
4) 1.78630 , = 698.80
5) 1.61174 , = 467.51

und die Unterschiede dieser Strahlenbrechungen geben

$$dD = 41''62\,,\quad \text{Unterschiede gegen oben} = -0''04$$
$$= 43.65\,,\qquad = -0.03$$
$$= 49.31\,,\qquad = -0.05$$
$$= 51.73\,,\qquad = -0.05$$
$$= 33.47\,,\qquad = -0.02$$

welche auch befriedigend sind.

68.

Um die beiden Abtheilungen der obigen Tafel mit einander zu vergleichen, nehme ich wieder die scheinbaren Werthe

$$z = 84^0\,45', \qquad D = 30'$$

an. Hiemit giebt die Besselsche Tafel I

$$\log\alpha = 1.71403, \quad A = 1.0118, \quad \lambda = 1.1154$$

also

$$\log\alpha + A(\log B + \log T) + \lambda\log\gamma =$$

1)	1.71403 ,	Strahlenbrechung =	9′ 23″
2)	1.73588 ,	=	9 52
3)	1.78152 ,	=	10 58
4)	1.80337 ,	=	11 32
5)	1.62469 ,	=	7 39

und die wahren Zenithdistanzen

$$z = 84^0\,54'\,23''$$
$$= 84\;54\;52$$
$$= 84\;55\;58$$
$$= 84\;56\;32$$
$$= 84\;52\;39$$

Geht man hiemit in die zweite Abtheilung der obigen Tafel ein, so erhält man

$\log\alpha_0$	= 6.2769,	= 6.2792,	= 6.2784,	= 6.2781,	= 6.2809
A_0	= ——	= 0.962 ,	= ——	= 0.962 ,	= 0.963
λ_0	= ——	= —— ,	= 1.224 ,	= 1.224 ,	= 1.223

und hiemit

$$\log \alpha_0 + A_0 (\log B + \log T) + \lambda_0 \log \gamma =$$

1)	6.2796 ,	x = 0.0242 ,	dD = 44″55
2)	6.3000 ,	= 0.0254 ,	= 46.90
3)	6.3525 ,	= 0.0289 ,	= 53.49
4)	6.3730 ,	= 0.0304 ,	= 56.37
5)	6.1860 ,	= 0.0193 ,	= 35.33

Dieselben Strahlenbrechungen wurden aber im vorvor. Art. aus der ersten Abtheilung der obigen Tafel berechnet, und fanden sich

dD = 44″56, Unterschiede gegen die vorstehenden	= − 0″02
= 46.90	= 0.00
= 53.37	= + 0.12
= 56.18	= + 0.19
= 35.34	= − 0.01

Die grösseren Unterschiede, die hier zum Vorschein gekommen sind, rühren davon her, dass die Besselschen Tafeln I und II bei den grossen Zenithdistanzen nicht genau mit einander übereinstimmen, und namentlich der Thermometerexponent der Tafel II etwas zu gross zu sein scheint. Wir fanden im vor. Art. aus der Besselschen Tafel II für $z = 85^0\,0'$, und im vierten Falle die Strahlenbrechung = 11′ 38″80, und es wird daher die dazu gehörige scheinbare Zenithdistanz

$$z = 84^0\,48'\,21''20$$

Geht man hiemit in die Besselsche Tafel I ein, so erhält man

$$\log \alpha = 1.71321, \qquad A = 1.0120, \qquad \lambda = 1.1170$$

also im vierten Falle

$$\log \alpha + A (\log B + \log T) + \lambda \log \gamma = 1.80265$$

und die Strahlenbrechung =

$$11'\ 38''33$$

das ist, 0″47 kleiner als aus der Tafel II.

Ausserdem habe ich noch bemerkt, dass die Besselsche Tafel für $\log B$, in der Abtheilung, die das Meter zum Argument hat, mit den beiden anderen Abtheilungen nicht genau übereinstimmt, sondern dass alle Angaben der genannten Abtheilung der Verbesserung = − 0.00013 bedürfen, um die Uebereinstimmung herbei zu führen. Diese Verbesserung habe ich in der obigen Tafel für $\log B$ schon angebracht.

Zusatz 3.

Ableitung einiger neuen Ausdrücke, um photographische Aufnahmen eines Venusvorüberganges vor der Sonne zur Bestimmung der Sonnenparallaxe zu verwenden.

69.

Nehmen wir die oben zu Ende des Art. 14 erhaltenen Gleichungen vor, substituiren darin mit Uebergehung des immer unmerklichen Gliedes $(r_{,}+r')\varrho_0 \sin H$ (Art. 17)

$$u = m\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b\,, \qquad \tau = t-\lambda$$

$$l\sin L = \sin K$$

$$l\cos L = d\cos K$$

dann werden diese Gleichungen

$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b\sin\theta + \frac{\gamma}{m}\cos N' - (\tau-\mu)\frac{n}{15\,m}\sin N' = -\varrho_0 l\cos H\sin L$$

$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b\cos\theta - \frac{\gamma}{m}\sin N' - (\tau-\mu)\frac{n}{15\,m}\cos N' = -\varrho_0 l\cos H\cos L$$

Seien für einen zweiten Beobachtungsort b', θ', $N_{,}'$, τ', l', H', L' dasselbe was b, θ, N', τ, l, H, L für den ersten bedeuten, dann erhalten wir für diesen Ort, den vorstehenden Gleichungen analog, die folgenden.

$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b'\sin\theta' + \frac{\gamma}{m}\cos N_{,}' - (\tau'-\mu)\frac{n}{15\,m}\sin N_{,}' = -\varrho_0 l'\cos H'\sin L'$$

$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b'\cos\theta' - \frac{\gamma}{m}\sin N_{,}' - (\tau'-\mu)\frac{n}{15\,m}\cos N_{,}' = -\varrho_0 l'\cos H'\cos L'$$

70.

Die vorstehenden vier Gleichungen sind mehr wie hinreichend zur Lösung der Aufgabe, und man kann daher eine grosse Anzahl von Lösungen daraus entwickeln. Auch selbst in dem Falle, dass man die Lösungen so einrichtet, dass sie von den tabularischen Elementen möglichst unabhängig sind, lassen sich mehrere Lösungen ableiten; aber wenn man zugleich den Längenunterschied der beiden Beobachtungsörter eliminiren will, dann ist nur Eine Lösung möglich.

Um den Unterschied zwischen $N_{,}'$ und N' zu berücksichtigen, setze ich

$$N_0' = \tfrac{1}{2}(N_{,}' + N')\ , \qquad \tau_0 = \tfrac{1}{2}(\tau' + \tau)$$

woraus

$$N' = N_0' + \tfrac{n_0}{15}(\tau - \tau_0)$$

$$N_{,}' = N_0' + \tfrac{n_0}{15}(\tau' - \tau_0)$$

entstehen, wenn n_0 die stündliche Aenderung von N' bezeichnet. Die Substitution dieser Werthe von N' und $N_{,}'$ in die Gleichungen des vor. Art. giebt,

$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b\,\sin\theta + \frac{\gamma}{m}\cos N_0' - (\tau-\mu)\frac{n}{15\,m}\sin N_0'$$
$$-(\tau-\tau_0)\frac{\gamma n_0}{15\,m}\sin N_0' - (\tau-\tau_0)(\tau-\mu)\frac{n n_0}{(15)^2 m}\cos N_0' = -\varrho_0 l\cos H\sin L$$

$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b\,\cos\theta - \frac{\gamma}{m}\sin N_0' - (\tau-\mu)\frac{n}{15\,m}\cos N_0'$$
$$-(\tau-\tau_0)\frac{\gamma n_0}{15\,m}\cos N_0' + (\tau-\tau_0)(\tau-\mu)\frac{n n_0}{(15)^2 m}\sin N_0' = -\varrho_0 l\cos H\cos L$$

$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b'\,\sin\theta' + \frac{\gamma}{m}\cos N_0' - (\tau'-\mu)\frac{n}{15\,m}\sin N_0'$$
$$-(\tau'-\tau_0)\frac{\gamma n_0}{15\,m}\cos N_0' - (\tau'-\tau_0)(\tau'-\mu)\frac{n n_0}{(15)^2 m}\sin N_0' = -\varrho_0 l'\cos H'\cos L'$$

$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b'\,\cos\theta' - \frac{\gamma}{m}\sin N_0' - (\tau'-\mu)\frac{n}{15\,m}\cos N_0'$$
$$-(\tau'-\tau_0)\frac{\gamma n_0}{15\,m}\sin N_0' + (\tau'-\tau_0)(\tau'-\mu)\frac{n n_0}{(15)^2 m}\cos N_0' = -\varrho_0 l'\cos H'\sin L'$$

71.

Multiplicirt man von den eben erhaltenen Gleichungen die erste mit $\sin N_0'$, die zweite mit $\cos N_0'$ und addirt die Producte, so erhält man

$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b\cos(N_0'-\theta) - (\tau-\mu)\frac{n}{15\,m} - (\tau-\tau_0)\frac{\gamma n_0}{15\,m} =$$
$$-\varrho_0 l\cos H\cos(N_0'-L)$$

die dritte und die vierte Gleichung geben eben so

$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b'\cos(N_0'-\theta') - (\tau'-\mu)\frac{n}{15\,m} - (\tau'-\tau_0)\frac{\gamma n_0}{15\,m} =$$
$$-\varrho_0 l'\cos H'\cos(N_0'-L')$$

und aus dem Unterschiede dieser beiden Gleichungen geht

$$\varrho_0 = \frac{\frac{r_{,}r'}{r}\{\operatorname{tg} b\cos(N_0'-\theta) - \operatorname{tg} b'\cos(N_0'-\theta')\} + \frac{\tau'-\tau}{15}\left(\frac{n+\gamma n_0}{m}\right)}{l'\cos H'\cos W_0' - l\cos H\cos W_0}$$

hervor, wenn der oben (Art. 15) eingeführten Bezeichnung analog

$$W_0 = N_0' - L\,, \qquad W_0' = N_0' - L'$$

gesetzt werden. Dieser Ausdruck für ϱ_0 kann als unabhängig von den Tafelfehlern betrachtet werden. Zwar kommen N_0', n, γ darin vor, allein wir haben oben (Art. 33) gesehen, dass unter der gewiss zulässigen Annahme, dass die Tafelfehler während des Zeitraums des Vorüberganges der Venus sich nicht ändern, N' und n von diesen Fehlern unabhängig sind. Freilich ist γ von diesen Fehlern abhängig, aber mit der sehr kleinen Grösse n_0 multiplicirt, und das Product γn_0 äussert so geringe Wirkung, dass der Tafelfehler in γ nicht in Betracht kommen kann. Ein Fehler hingegen in dem Längenunterschied der beiden Beobachtungsörter ist nicht ohne merkliche Einwirkung, da das Glied, welches das Product $(\tau' - \tau)n$ enthält, schon für kleine Werthe von $\tau' - \tau$ ohngeachtet des Divisors $15m$ merkliche Werthe annimmt.

Um den Nenner des vorstehenden Ausdrucks möglichst gross zu erhalten, dürfen an beiden Beobachtungsörtern die Sonnenhöhen nicht gross sein, und es dürfen ausserdem von den beiden Bögen W_0 und W_0' der eine sich nicht weit von 0, der andere sich nicht weit von 180° entfernen.*) In der Regel wird der eine Beobachtungsort auf der nördlichen, und der andere auf der südlichen Halbkugel der Erde liegen. Zur Auswahl dieser Oerter kann man, nach geringer Aenderung der Formeln für die Grenzcurven, die Curven berechnen, auf welchen $W = 0$, oder $= 180°$ ist, und auf den Planigloben aufzeichnen.

72.

Aus den beiden ersten Gleichungen des vor. Art. kann man durch Addition einen anderen Ausdruck für ϱ_0 erhalten. Sie geben auf diese Weise

$$\varrho_0 = -\frac{\frac{r,r'}{r}\left\{\operatorname{tg} b \cos(N_0' - \theta) + \operatorname{tg} b' \cos(N_0' - \theta')\right\} - 2\,\frac{\tau_0 - \mu}{15}\cdot\frac{n}{m}}{l' \cos H' \cos W'_0 + l \cos H \cos W_0}$$

zu welchem Ausdruck aber bemerkt werden muss, dass er zufolge des Factors $\tau_0 - \mu$ im letzten Gliede des Zählers sowohl von den Tafelfehlern

*) Eine Entfernung von 20° von diesen Werthen hat wenig zu bedeuten, da $\cos 20° = 0.94$ ist, also sich wenig von Eins entfernt. Ja man kann im Nothfall noch weiter gehen. Diese Bemerkung gilt auch für die folgenden Ausdrücke.

wie von den Längenfehlern der Beobachtungsörter beeinflusst werden kann; er ist also minder vortheilhaft wie der Ausdruck des vor. Art. Er verlangt übrigens, dass beides W_0' und W_0 sich entweder nicht weit von 0, oder von 180° entfernen, und die beiden Beobachtungsörter werden daher auf derselben Halbkugel der Erde liegen müssen.

73.

Um noch einen andern Ausdruck für ϱ_0 abzuleiten, multiplicire man die erste Gleichung des Art. 70 mit $\cos N_0'$, die zweite mit $\sin N_{,}^{0}$, und subtrahire die Producte. Hiemit entsteht

$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b\,\sin(N_0'-\theta)-\frac{\gamma}{m}+(\tau-\tau_0)(\tau-\mu)\frac{nn_0}{(15)^2 m}=-\varrho_0 l\cos H\sin(N_0'-L)$$

die dritte und die vierte Gleichung geben auf dieselbe Weise

$$\frac{r_{,}r'}{r}\operatorname{tg} b'\sin(N_0'-\theta')-\frac{\gamma}{m}+(\tau'-\tau_0)(\tau'-\mu)\frac{nn_0}{(15)^2 m}=-\varrho_0 l'\cos H'\sin(N_0'-L')$$

aus deren Unterschied man erhält

$$\varrho_0=\frac{\frac{r_{,}r'}{r}\left\{\operatorname{tg} b\,\sin(N_0'-\theta)-\operatorname{tg} b'\sin(N_0'-\theta')\right\}-\frac{\tau'-\tau}{15}\cdot\frac{\tau_0-\mu}{15}\cdot\frac{nn_0}{m}}{l'\cos H'\sin W_0'-l\cos H\sin W_0}$$

welcher Ausdruck sowohl von den möglichen Tafelfehlern, wie von den Längenfehlern der beiden Beobachtungsörter als unabhängig betrachtet werden kann, da wegen der Kleinheit des Products nn_0 das letzte Glied des Zählers immer sehr klein ist*); dieser Ausdruck ist also vortheilhafter als die beiden vorhergehenden, und überhaupt der vortheilhafteste, welcher sich auf diese Weise entwickeln lässt. Es dürfen wieder hier die Sonnenhöhen nicht gross sein, und von den beiden Bögen W_0 und W_0' dürfen der eine sich nicht viel von 90°, und der andere sich nicht viel von 270° entfernen. Man kann wieder auf die oben angedeutete Art die betreffenden Curven berechnen, und auf den Planigloben aufzeichnen.

---

*) Im Venusvorübergange des Jahres 1874 ist

$$\frac{nn_0}{m}=-0''\!.0436$$

und es müssten daher der Fehler, sowohl von $\frac{\tau'-\tau}{15}$ wie der von $\frac{\tau_0-\mu}{15}$ eine volle Stunde betragen, um einen Fehler von 0″.04 in diesem Gliede hervorzubringen. Solche Fehler sind aber undenkbar.

74.

Die beiden folgenden, im Vorhergehenden schon erhaltenen Gleichungen

$$\frac{r_{,}r'}{r}\left\{\operatorname{tg}b\cos(N_0'-\theta)-\operatorname{tg}b'\cos(N_0'-\theta')\right\}+\frac{\tau'-\tau}{15}\left(\frac{n+\gamma n_0}{m}\right)=\rho_0\left\{l'\cos H'\cos W_0'-l\cos H\cos W_0\right\}$$

$$\frac{r_{,}r'}{r}\left\{\operatorname{tg}b\sin(N_0'-\theta)-\operatorname{tg}b'\sin(N_0'-\theta')\right\}-\frac{\tau'-\tau}{15}\cdot\frac{\tau_0-\mu}{15}\cdot\frac{nn_0}{m}=\rho_0\left\{l'\cos H'\sin W_0'-l\cos H\sin W_0\right\}$$

geben zu noch einem anderen Ausdruck für ρ_0 Veranlassung. Erhebt man jede derselben ins Quadrat, und zieht von der Summe der Quadrate die Wurzel aus, so bekommt man den Ausdruck

$$\rho_0=\frac{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{r_{,}r'}{r}\right)^2\Delta^2+\left(\frac{\tau'-\tau}{15}\right)^2\left(\frac{n+\gamma n_0}{m}\right)^2\\+2\frac{\tau'-\tau}{15}\cdot\frac{r_{,}r'}{r}\left(\frac{n+\gamma n_0}{m}\right)\left(\operatorname{tg}b\cos(N_0'-\theta)-\operatorname{tg}b'\cos(N_0'-\theta')\right)\\-2\frac{\tau'-\tau}{15}\cdot\frac{\tau_0-\mu}{15}\cdot\frac{r_{,}r'}{r}\cdot\frac{nn_0}{m}\left(\operatorname{tg}b\sin(N_0'-\theta)-\operatorname{tg}b'\sin(N_0'-\theta)\right)\end{array}\right\}}}{\sqrt{\left\{l^2\cos^2H+l'^2\cos^2H'-2ll'\cos H\cos H'\cos(W_0'-W_0)\right\}}}$$

in welchem zur Abkürzung

$$\Delta^2=\operatorname{tg}^2b+\operatorname{tg}^2b'-2\operatorname{tg}b\operatorname{tg}b'\cos(\theta-\theta')$$

gesetzt worden ist, und folglich Δ die Entfernung der Mittelpunkte der Venus von einander auf den beiden Photographien ist.

Dieser Ausdruck für ρ_0 kann auch als von den Tafelfehlern unabhängig betrachtet werden, da n und N_0' davon unabhängig sind, und γ und μ mit dem sehr kleinen Factor n_0 multiplicirt sind. Aber der Fehler des Längenunterschiedes der beiden Beobachtungsörter, welcher in $\tau'-\tau$ enthalten ist, übt merklichen Einfluss auf diese Bestimmung von ρ_0 aus. Ueberhaupt wachsen, wenn $\tau'-\tau$ nicht ganz klein ist, das mit $(\tau'-\tau)^2$, und das erste der beiden mit $(\tau'-\tau)$ multiplicirten Glieder so sehr an, dass sie grösser werden können als das mit Δ^2 multiplicirte Glied, aber sie haben in diesem Falle das entgegengesetzte Zeichen, ihre Summe wird negativ und immer kleiner als das erste Glied des Zählers. Dieser Ausdruck ist zusammengesetzter, und minder vortheilhaft als der des vor. Art.

Bei der Anwendung desselben dürfen wieder, wie immer, auf beiden Beobachtungsörtern die Sonnenhöhen nicht zu gross sein, und es darf sich ausserdem der Bogen $W_0'-W_0$, oder der Unterschied der

beiden parallactischen Winkel, nicht weit von 180° entfernen. Man kann unter jedem Azimuth in Bezug auf die Oerter, über welchen die Sonne im Zenith culminirt, Oerter angeben, die diesen Bedingungen gnügen.

75.

Wenn $\tau' = \tau$ ist, oder wenn beide Photographien gleichzeitig aufgenommen worden sind, welche Bedingung aber unter andern eine genaue Kenntniss des Längenunterschiedes der beiden Beobachtungsörter voraussetzt, dann vereinfacht sich der Ausdruck des vor. Art. beträchtlich, und geht in den folgenden über,

$$\varrho_0 = \frac{r_{,} r'}{r} \cdot \frac{\Delta}{\sqrt{\{l^2 \cos^2 H + l'^2 \cos^2 H' - 2 ll' \cos H \cos H' \cos(W_0' - W_0)\}}}$$

Dieser Ausdruck ist, wenn man von der Abplattung der Erde absieht, mit dem Ausdruck identisch, den der Herr Geheime Canzelleirath Paschen ganz vor Kurzem veröffentlicht und empfohlen, aber auf ganz andere Weise abgeleitet hat.

76.

Die hier entwickelten Ausdrücke weichen von allen bisherigen darin ab, dass sie ausser der Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und der Venus von einander, auch die Beobachtung des Positionswinkels der Venus auf jeder der beiden Stationen verlangen, welche letztere Beobachtungen man bisher aus den Ausdrücken sorgfältig eliminirt hat. Man darf, dieser neu hinzugekommenen Forderung wegen, diese Ausdrücke nicht unbeachtet lassen, sondern muss sich bemühen, sie auf ihren richtigen Platz zu stellen.

Um die Abmessung des Positionswinkels auf den Photographien zu ermöglichen, kann man, wie der eben genannte Verfasser vorschlägt, im Brennpunkt des Fernrohrs des parallactisch aufgestellten Instruments, welches zur Aufnahme der Photographien dient, einen Spinnefaden einziehen, welcher in der Ebene des Abweichungskreises liegt, sich auf der Photographie mit abbilden wird, und als Grundlinie für die Messung des Positionswinkels dienen soll. Mit welchem Grade der Genauigkeit man auf diese Weise den Positionswinkel erhalten kann, bin ich gegenwärtig nicht im Stande anzugeben, da ich keine Gelegenheit gehabt

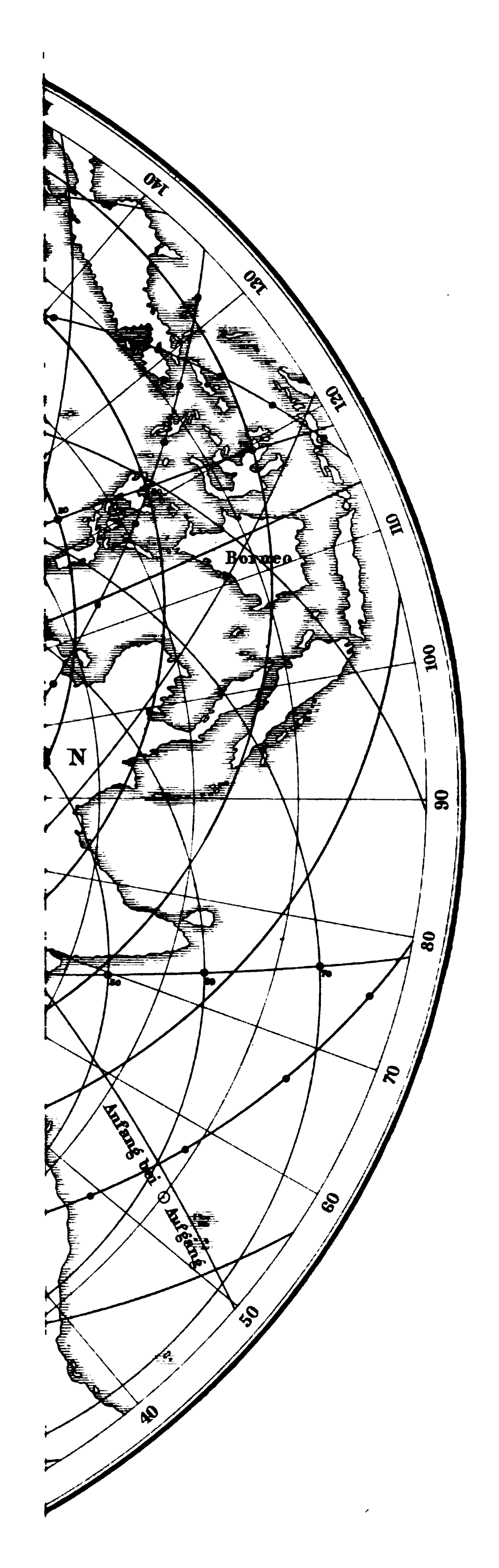
habe Versuche darüber anzustellen, mir auch derartige Versuche von Andern nicht bekannt sind.

Ich habe zwar aus Amerika Photographien der vorjährigen Sonnenfinsterniss erhalten, auf welchen solche Fäden mit abgebildet sind, allein diese Photographien sind zu klein, um hinreichend genaue Messungen darauf vornehmen zu können. Selbst wenn sie hiefür hinreichende Grösse hätten, würde es unter anderen darauf ankommen, mit welcher Genauigkeit das angewandte Instrument den Abweichungskreis hat angeben können. Schliesslich bemerke ich noch, dass wenn die Instrumente, deren man sich zur directen Messung der Ränderentfernungen bedient, so eingerichtet sind, dass sie den Positionswinkel mit ausreichender Genauigkeit geben, die vorstehenden Ausdrücke selbstverständlich auch auf diese Beobachtungen angewandt werden können.

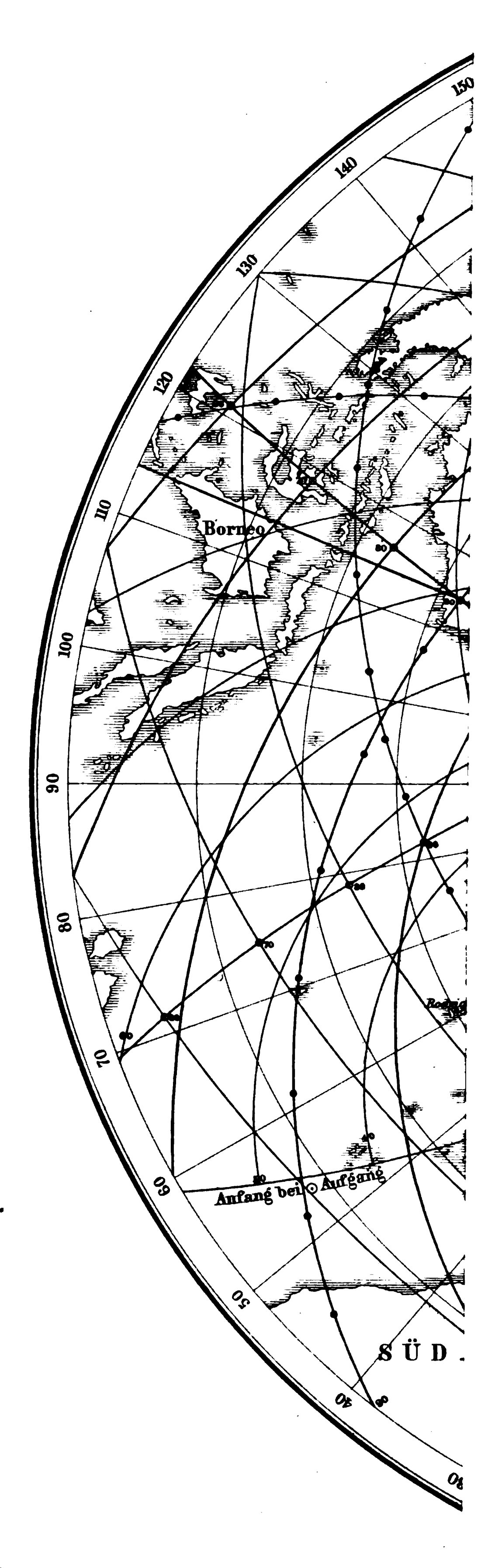
Druckfehler.

S. 465 Z. 5 v. u. lies: a' statt a

S. 470 Z. 4 v. u. lies: Grössen statt Grösse



140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
Borneo
N
Anfang bei ⊙ Aufgang


150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
Borneo
Anfang bei ⊙ Aufgang
SÜD

